Library,

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 1. Dezember 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 4. Dezember 1917.

INHALT:

Ernst Pringsheim †. Nachruf. Von Cl. Schaefer. S. 557.

Originalmitteilungen:

K. Federhofer, Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. S. 560.

E. Waetzmann, Über Schwebungen. S. 560.

E. Schrödinger, Nachtrag zum Aufsatz: Zur Akustik der Atmosphäre. S. 567.

I. Parankiewicz, Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe. S. 567.

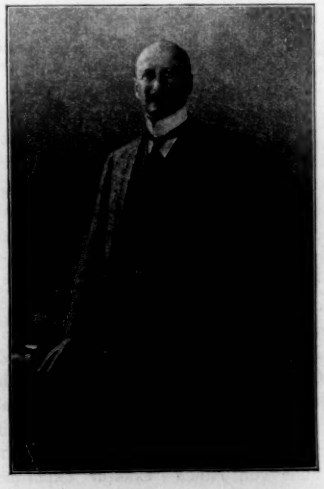
Zusammenfassende Bearbeitungen:

G. Mie, Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie. (Fortsetzung.) S. 574.

Personalien. S. 580.

Ernst Pringsheim †.

Am 28. Juni 1917, abends gegen 6 Uhr, erlag der ordentliche Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau, Dr. Ernst Pringsheim, einem Schlaganfalle, mitten aus scheinbar bestem Wohlbefinden und blühender Gesundheit heraus.



Zu dieser Stunde sollte eine Sitzung der Naturwissenschaftlichen Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur im physikalischen Institut der Universität stattfinden, die Pringsheim als vorsitzender Sekretär mit einem Nekrolog auf den jüngst verstorbenen Mineralogen Carl Hintze eröffnen sollte. Statt dessen kam, wenige Minuten vor Beginn der Sitzung, uns alle überraschend und erschütternd, die Nachricht von seinem jähen Hinscheiden. In tiefer Rührung sprach Lummer einige Worte zum Gedächtnisse seines langjährigen Freundes und Mitarbeiters, und dann wurde die Sitzung vertagt. Am 1. Juli wurde er auf dem Friedhofe der reformierten Gemeinde in Breslau beigesetzt.

Pringsheim war am 11. Juli 1859 in Breslau geboren; er hat also ein Alter von nicht ganz 58 Jahren erreicht. Er besuchte in seiner Vaterstadt das Magdalenen- und Johannes-Gymnasium und widmete sich dann auf den Universitäten Breslau, Heidelberg und Berlin dem Studium der Physik und Mathematik. Besonderen Einfluß gewannen auf ihn Helmholtz und Kirchhoff, und aus diesen Zeiten stammen seine freundschaftlichen Beziehungen zu zahlreichen namhaften Physikern, die aus dem Berliner Laboratorium hervorgegangen sind. 1882 promovierte er zum Doktor der Philosophie, 1886 erfolgte

seine Habilitation für Physik an der Berliner Universität, 1896 wurde er durch Verleihung des Professortitels ausgezeichnet, und 1905 wurde er, nachdem er inzwischen einen Ruf nach Greifswald abgelehnt hatte, als ordentlicher Professor der theoretischen Physik nach Breslau berufen, wohin ihm sein Mitarbeiter Lummer ein halbes Jahr früher vorangegangen war. Hier waren ihm noch 12 Jahre reichen Schaffens und Wirkens vergönnt.

Pringsheims wissenschaftliche Produktion war fast ausschließlich experimenteller Natur; er war ein vortrefflicher, kritischer Beobachter und in seinen Arbeiten zeigt sich ein ausgesprochenes experimentelles Geschick. Gleich in seiner Dissertation tat er den bedeutungsvollen Schritt, zur Untersuchung der ultraroten Wärmestrahlung die Linsen des Spektrometers durch Hohlspiegel zu ersetzen, und er schuf so eine Anordnung, aus der sich unser heutiges Spiegelspektrometer entwickelt hat. In derselben Arbeit verwendete er auch als erster das Radiometer zu Meßzwecken. Er hat damit das Gebiet beschritten, auf dem er später mit Lummer zusammen seine bedeutendsten Arbeiten machen sollte. Einstweilen jedoch behandeln seine der ersten nachfolgenden Arbeiten recht verschiedene Themata; so verband er sich mit dem Jenenser Philologen Schwan zu einer phonometrischen Untersuchung über den französischen Akzent, mit dem damaligen Königsberger Juristen Gradenwitz zur Ausarbeitung einer photographischen Methode zur Rekonstruktion von Palimpsesten. Eine kleine Arbeit ist es nur, von etwa drei Seiten, aber eine Fülle von feinen physikalisch-chemischen Anwendungen enthaltend; mit einem Worte: ein kleines Meisterwerk. Nachdem er sich weiterhin der Frage nach der Art der Elektrizitätsleitung in heißen Gasen zugewandt hatte, erschienen zu Beginn der neunziger Jahre seine Abhandlungen über das Kirchhoffsche Gesetz und die Strahlung der Gase. Während man bis dahin — nach dem Vorgange seines Urhebers — unbedenklich das Kirchhoffsche Gesetz auf die Lichtemission der Gase z. B. im Bunsenbrenner, im Geißlerrohr usw. angewendet hatte, war Pringsheim der erste, der an der Berechtigung dazu zweifelte. Er bemühte sich zu zeigen, daß das Leuchten der farbigen Flammen keine Temperaturstrahlung sei — für eine solche gilt allein das Kirchhoffsche Gesetz —, sondern durch chemische Einflüsse bedingt würde. Er vertrat mit Energie die Ansicht, daß durch Temperaturerhöhung allein die Gase nicht zum Leuchten gebracht werden könnten. Zweifellos ist er damit — wie gerade die unter Lummers und seiner Leitung im hiesigen physikalischen Institut ausgeführten Arbeiten gezeigt haben, — zu weit gegangen; doch hat er das unbestrittene Verdienst, zuerst diese Frage angeschnitten und damit der Wissenschaft einen mächtigen Impuls gegeben zu haben. Insbesondere hat er den großen Unterschied betont zwischen der ultraroten Strahlung der Gase, z. B. der Kohlensäure, und der Lichtemission im Banden- oder Serienspektrum, und darin hat ihm die weitere Forschung durchaus recht gegeben.

Gegen Ende der neunziger Jahre beginnt die Periode gemeinsamen Schaffens mit Lummer. Zunächst veröffentlichten sie eine Arbeit, deren Inhalt ganz abseits liegt: Eine Neubestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärme einiger Gase. Diese Arbeit kann ein Muster exakter experimenteller Forschung genannt werden. Kurz darauf erschienen in rascher Folge die gemeinsamen Untersuchungen über die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers, über die Energieverteilung im Spektrum desselben und des

blanken Platins, über bolometrische und photometrische Methoden zur Temperaturbestimmung. Die Bedeutung dieser Arbeiten ist zu bekannt, als daß es notwendig wäre, hier näher darauf einzugehen. Nur das eine sei hier betont, daß sie die ursprünglich einzige experimentelle Unterlage und den Anstoß für die kühne Quantenhypothese Plancks bildeten, die jetzt im Begriffe steht, die Grundbegriffe der Physik zu revolutionieren.

Diese gemeinsamen Arbeiten fanden etwa 1905 ihren Abschluß durch die Berufung Lummers nach Breslau, wohin ihm Pringsheim Oktober desselben Jahres als Vertreter der theoretischen Physik nachfolgte.

Es war bereits oben erwähnt worden, daß Pringsheims ganze Arbeitsrichtung experimenteller Natur war; nur eine theoretische Arbeit liegt von ihm vor, nämlich ein außerordentlich einfacher und strenger Beweis des Kirchhoffschen Gesetzes. Durch diese Arbeit wurde er übrigens in eine Polemik mit Hilbert verwickelt, die er schließlich abgebrochen hat, obwohl ihn die Gründe seines Gegners nicht überzeugt hätten. Durch seine Berufung wurde er plötzlich vor andere Aufgaben gestellt, die er mit der ihm eignen Gewissenhaftigkeit und Gründlichkeit zu bewältigen bestrebt war, nämlich die Ausarbeitung seiner Vorlesungen über theoretische Physik. So ist es erklärlich, daß der reiche Strom produktiver Forschung nach seiner Berufung nach Breslau allmählich verebbt ist. Dafür aber sind unter Lummers und seiner Leitung im Breslauer physikalischen Institut auf den von ihm gepflegten Gebieten zahlreiche wertvolle Arbeiten entstanden. Von diesen seien hier nur diejenigen über die Empfindlichkeitskurve des Auges für die verschiedenen Lichtwellenlängen erwähnt, die mittels des von ihm und Lummer konstruierten „Spektralflickerphotometers" ausgeführt worden sind.

Pringsheim hat hier in Breslau einen sechssemestrigen Kursus der theoretischen Physik eingerichtet. (Zwei Semester Mechanik, je eins Wärme, Elektrizität, Optik, kinetische Theorie der Materie und Elektrizität), wozu noch die Übungen im gewöhnlichen Umfange traten. Gelegentlich hat er auch eine kleine Spezialvorlesung über Relativität gehalten, in der sich neben den Studierenden auch fast sämtliche jüngere Dozenten vor seinem Katheder einfanden. Es war die einzige Vorlesung, die ich bei Pringsheim zu hören Gelegenheit hatte. Seine Art vorzutragen, entsprach durchaus seiner Natur: Stets sprach er rein sachlich, gelegentlich die Strenge des Stoffes mit feinem Takte durch einen leisen Humor würzend. So waren seine Vorlesungen nicht minder wie gelegentliche Vorträge im Humboldtverein für Volksbildung für den reifen Hörer ein vollendeter Genuß. Auch wer nicht Gelegenheit hatte, ihn zu hören, kann sich ein Bild von seiner Art machen, wenn er das prächtige Buch „Physik der Sonne" in die Hand nimmt, in dem er seine Berliner Vorlesung gleichen Titels der Öffentlichkeit übergeben hat. Auch hier zeigt sich glänzend seine pädagogische Begabung und seine lichtvolle Klarheit der Darstellung. Sie eignete ihm nicht nur in wissenschaftlichen Dingen; auch bei geschäftlichen Verhandlungen in Fakultät und Senat mußten diese Eigenschaften ihn zu einem äußerst geschätzten Mitgliede der Universität machen. Es war oft glänzend, wie er in schwierigen Fragen den Nagel auf den Kopf traf, und eine verfahrene Situation mit einem treffenden Witzwort löste, das die Spannung beseitigte und bei den Beteiligten kein Unbehagen hinterließ. So wuchs sein Einfluß in Breslauer Universitätskreisen rasch, und gerade im Todesjahr berief ihn das Ver-

trauen der Kollegen zur Würde des Dekans der philosophischen Fakultät. Nach zehnmonatlicher glänzender Geschäftsführung entriß ihn uns der unerbittliche Tod.

Uns allen, seinen Kollegen und seinen Schülern, wird sein Gedächtnis in Ehren stehen als das eines makellosen, vornehmen und liebenswürdigen Mannes; sein Wirken und seine Persönlichkeit werden im Breslauer Institut nicht vergessen werden.

Clemens Schaefer.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

Von Karl Federhofer.

Das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit

$$L_i = \min$$

in Verbindung mit der Gleichheit der inneren Arbeit L_i und der äußeren Arbeit L_a kann nach dem Lorenzschen Ansatze[1]) durch die gleichwertige Bedingung

$$L_i - 2L_a = \text{Extrem}$$

ersetzt werden. Man gewinnt einen gegenüber der Lorenzschen, mit Benutzung der Methode von Ritz gegebenen Beweisführung einfacheren Beweis dieses Satzes durch dessen unmittelbare Herleitung aus dem Kirchhoffschen Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, die nachstehend gezeigt werden soll.

Dieses Prinzip lautet für den elastisch-festen Körper bei Voraussetzung des Hookeschen Elastizitätsgesetzes bekanntlich:

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s - \delta L_i = 0, \qquad (1)$$

wenn δs die virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes einer äußeren Kraft, $\mathfrak{P}$ und L_i die in den Formänderungsgrößen ausgedrückte Formänderungsarbeit bedeutet. Die Gesamtheit der Kräfte $\mathfrak{P}$, die nach den Achsenrichtungen x, y, z die Komponenten X, Y, Z besitzen, ruft in dem Körper eine Formänderuug hervor, wobei sie eine Arbeit

$$L_a = \frac{1}{2} \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \qquad (2)$$

leisten, wenn ξ, η, ζ die in den Achsenrichtungen genommenen Arbeitswege bedeuten und die Kräfte allmählich von Null bis zu den gegebenen Werten X, Y, Z anwachsen.

1) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 57, 543. 1913; diese Zeitschr. 14, 71, 1913.

Nun unterwerfen wir den deformierten Körper einer virtuellen Verschiebung, bei der sich die Verschiebungskomponenten um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ändern mögen; dann beträgt die Verschiebungsarbeit der äußeren Kräfte

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s = \Sigma (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta).$$

Da in Gleichung (1) solche geometrisch mögliche Formänderungszustände verglichen werden, die alle zu denselben Lasten gehören, so ist auch wegen (2):

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s = 2\delta L_a.$$

Hiermit lautet Gleichung (1):

$$2\delta L_a - \delta L_i = 0$$

oder

$$\delta (L_i - 2L_a) = 0$$

und hiernach

$$L_i - 2L_a = \text{Extrem}.$$

Für den sich tatsächlich einstellenden Formänderungszustand besitzt also die Differenz aus der Formänderungsarbeit und der doppelten Arbeit der äußeren Kräfte einen extremen Wert, und zwar handelt es sich hier, wie Prof. v. Kármán gezeigt hat, um ein Maximum.

Graz, am 1. Oktober 1917.

(Eingegangen 13. Oktober 1917.)

Über Schwebungen.

(Zugleich als Erwiderung an Herrn Budde.)

Von E. Waetzmann.

§ 1. Fragestellung.

Man pflegt das Auftreten von Schwebungen in folgender Weise herzuleiten: Gegeben sind zwei ungedämpfte sinusförmige Schwingungen von gleicher Amplitude und der anfänglichen Phasendifferenz Null, die sich ungestört, d. h.

rein additiv überlagern. Die Schwingungszahlen p und q sollen nahe aneinander liegen, so daß $p-q$ eine sehr kleine Zahl ist. Die Resultierende

$$y = A \sin 2\pi p t + A \sin 2\pi q t \qquad (1)$$

kann in der Form

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t \qquad (2)$$

geschrieben werden. Die rechte Seite von Gleichung (2) wird dann als Ton von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ mit der variablen Amplitude

$$2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t$$

gedeutet. Diese Variation der Amplitude ergibt pro Sekunde einen $p-q$ maligen Wechsel der Intensität.

Es wird demgemäß aus Gleichung (2) auf zweierlei geschlossen, erstens auf das Vorhandensein eines bestimmten Tones, nämlich des Tones $\frac{p+q}{2}$, und zweitens auf einen $p-q$ mal in der Sekunde erfolgenden Intensitätswechsel dieses Tones.

Gegen den ersten Teil der Deutung von (2) habe ich in einer früheren Arbeit[1]) Einwände erhoben. Ferner habe ich in dieser Arbeit allgemein klarzustellen versucht, aus welcher rein formalen Darstellung einer aus mehreren Tönen zusammengesetzten Kurve auf das Vorhandensein bestimmter Töne geschlossen werden darf, und habe endlich positive Aussagen über die Schwebungstöne gemacht.

Da Herr Budde[2]) meine Einwände für nicht stichhaltig hält, und auch meinen sonstigen Ausführungen eigene Ausführungen „gegenübergestellt", die mir zum großen Teil auf einem Mißverständnis meiner früheren Auseinandersetzungen zu beruhen scheinen, möchte ich mir im folgenden erlauben, nochmals etwas ausführlicher auf die strittigen Fragen zurückzukommen. Vorausschicken möchte ich, daß ich den an sich sehr interessanten Buddeschen Ausführungen, soweit sie sachlich wirklich im Gegensatz zu den meinigen stehen, nicht beizupflichten vermag.

§ 2. Schwebungskurven bei gleichen Amplituden der Primärtöne.

Wir beschränken uns zunächst auf den in § 1 erwähnten einfachsten Fall, daß die Amplituden der beiden Primärtöne gleich sind. Es wird behauptet, daß die Schwingungszahl der Resultierenden in diesem Falle konstant $= \frac{p+q}{2}$ ist, und daß damit Gleichung (2) das Vorhandensein eines bestimmten Tones von gegebener Schwingungszahl beweist.

Wenn wir schon außerhalb des Ohres von einem „Ton"[1]) sprechen, so ist das nur eine abgekürzte Bezeichnungsweise für einen rein physikalischen Vorgang. Wir verstehen darunter eine Sinusschwingung von bestimmter Schwingungszahl und Amplitude. Nimmt die Amplitude allmählich zu oder ab, so nennen wir diesen Vorgang auch noch einen Ton, und zwar an- oder abklingenden Ton. Das eigentliche Charakteristikum des Tones im Außenraum ist also die Schwingungszahl, indem per definitionem der „Ton" ein anderer wird, wenn sich die Schwingungszahl ändert. Das ist ein für die Würdigung der Buddeschen Bedenken grundsätzlich wichtiger Punkt.

Für die Beschreibung der Vorgänge im Ohre selbst sind dann noch spezielle Zusatzhypothesen über das Zustandekommen der Nervenreizungen notwendig. Auf diese Fragen kommen wir in § 4 zurück.

Zunächst wollen wir uns die charakteristischen Merkmale einer Schwebungskurve außerhalb des Ohres, soweit sie für unsere Zwecke von Wichtigkeit sind, auf möglichst einfache Weise vor Augen führen. Wir haben hierbei besonders auf die Schwingungsanzahl zu achten. Wenn wir von der Schwingungsanzahl oder Schwingungsdauer einer komplizierten Kurve sprechen, so müssen wir von vornherein genau festsetzen, was wir darunter verstehen wollen. Solange die Schwingung derart beschaffen ist, daß zwischen zwei Umkehrpunkten stets die Ruhelage durchschritten wird, ist es m. E. das physikalisch Richtige, als Dauer einer Schwingung die Zeitdauer von einem Durchgangspunkt durch die Ruhelage bis zum übernächsten Durchgang zu rechnen. Bei gegebener Schwingungszahl pro Sekunde kann noch die Dauer der einzelnen Schwingungen innerhalb dieser Sekunde eine verschiedene sein, und ferner können innerhalb einer Schwingung die Abstände der äußeren Nullstellen von der mittleren ungleich sein. Bei dem Schwingungsvorgang, der durch Gleichung (2) dargestellt wird, tritt unter speziellen Verhältnissen tatsächlich das eine oder andere oder beides ein. Wir wollen das Gesagte an einigen Zahlenbeispielen erläutern.

p und q sollen für die Beispiele dieses und

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **12**, 231, 1911. (Waetzmann I.)
2) E. Budde, diese Zeitschr. **18**, 285, 1917. (Budde I.)

1) E. Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1912, S. 86 ff. (Waetzmann II.)

des folgenden Paragraphen die relativen Schwingungszahlen der Primärtöne bedeuten, so daß ihr größter gemeinsamer Teiler stets = 1 ist. Als Zeiteinheit haben wir dann die Dauer einer Periode zu wählen. Um Arbeit beim Zeichnen zu sparen, nehmen wir p und q sehr klein an; für größere Zahlenwerte erhält man entsprechende Kurven.

I. Es sei $p = 5$ und $q = 4$. Die Primärtöne und die Resultierende sind in Fig. 1 gezeichnet.

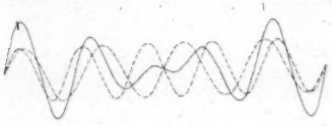


Fig. 1.

Während die Schwingungsdauer im Maximum und bis in die Nähe des Minimums konstant

$$= \frac{2}{p+q} = \frac{2}{9}$$

einer Periode ist, springt sie im Minimum selbst in

$$\frac{1}{p+q} = \frac{1}{9}$$

einer Periode um.

Daß das eintreten muß, sieht man ohne genaues Zeichnen der Resultierenden sehr leicht, wenn man zunächst den Faktor

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

von Gleichung (2) mit einem Phasensprung von der Größe π an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ betrachtet (Fig. 2) und nun die Amplitude von $t = 0$ und $t = 1$ aus nach der Mitte zu allmählich abnehmen läßt.

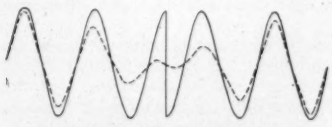


Fig. 2.

Auch aus Formel (2) selbst ist das leicht zu sehen, denn sie zeigt, daß Nullstellen eintreten für die Zeitmomente

$$t' = \frac{\mathfrak{k}}{p+q}, \text{ wo } \mathfrak{k} = 0, 1, 2 \ldots p+q-1$$

ist, und für die Zeitmomente

$$t'' = \frac{2\mathfrak{k}+1}{2(p-q)}, \text{ wo } \mathfrak{k} = 0, 1, 2 \ldots p-q-1$$

ist. Ist also $p-q = 1$, so ist der Abstand der Nullstelle im Minimum, $t'' = \frac{1}{2}$, von den rechts und links benachbarten Nullstellen halb so groß wie die übrigen Abstände je zweier Nullstellen.

Die „Schwingungszahl" der Resultierenden springt also im Minimum in die höhere Oktave um, und es hat im Falle $p-q = 1$ keinen physikalischen Sinn, von einem Phasensprung in der Resultierenden zu sprechen. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

II. Es sei $p = 7$ und $q = 5$. Wir zeichnen zunächst wieder die Kurve

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

mit den dem Faktor

$$\cos 2\pi \frac{p-q}{2} t$$

der Gleichung (2) entsprechenden Phasensprüngen an den Stellen

$$t = \frac{1}{4} \text{ und } t = \frac{3}{4}.$$

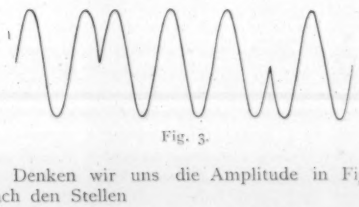


Fig. 3.

Denken wir uns die Amplitude in Fig. 3 nach den Stellen

$$t = \frac{1}{4} \text{ und } t = \frac{3}{4}$$

hin je von beiden Seiten allmählich abnehmen, so haben wir damit wieder ohne genauere Zeichnung ein ungefähres Bild der Resultierenden, aus dem wir das, was für uns von Interesse ist, entnehmen können. Dieses Bild zeigt uns, daß es im vorliegenden Falle und in entsprechenden Fällen auch noch physikalischen Sinn hat, die Resultierende als Kurve von konstanter Schwingungszahl mit Phasensprüngen anzusehen.

III. Betrachten wir endlich noch einen in der Mitte zwischen I und II liegenden Fall, wo die Phasensprünge in der Kurve

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

nicht durchweg an Stellen maximaler Elongation oder von Durchgängen durch die Nullage stattfinden. Es sei $p = 7$ und $q = 4$. Die Phasensprünge finden dann in den Zeitmomenten $t = \frac{1}{6}$, $t = \frac{3}{6}$ und $t = \frac{5}{6}$ statt.

Lassen wir wieder die Amplitude nach

Fig. 4.

diesen Stellen hin allmählich abnehmen, so sehen wir in der Resultierenden an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ Frequenzverdoppelung und an den Stellen $t = \frac{1}{6}$ und $t = \frac{5}{6}$ Frequenzänderung mit ungleichen Hälften einer Schwingung.

Wenn also die Resultierende selbst und nicht immer nur die spezielle Art betrachtet wird, wie man sie aus Gleichung (2) entstehen lassen kann, so sieht man, daß es physikalisch keinen Sinn hat, durchweg eine konstante Schwingungszahl $\left(\frac{p+q}{2}\right.$ mal der Periodenzahl$\left.\right)$ und Phasensprünge anzunehmen. Vielmehr ist die ungezwungene physikalische Vorstellung, die ein richtiges Bild der Resultierenden gibt, die folgende: Minima treten auf an den Stellen $\cos 2\pi \frac{p-q}{2} t = 0$, also $p-q$ pro Periode. Die hinzutretenden Bedingungen sind: a) für ausgesprochenen Phasensprung:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t = 0$$

an der Stelle t'. b) für Frequenzverdoppelung:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t = \pm 1$$

an der Stelle t'' und c) für andere Frequenzänderung komplizierter Art:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

zwischen 0 und $\pm$ 1 an der Stelle t'.

Die Darstellung der Resultierenden durch Gleichung (2) hat natürlich auch ihre Vorzüge, namentlich zeigt sie sehr durchsichtig das Schwanken der Intensität. Auf der anderen Seite ist (2) aber nur eine mögliche, und zwar vom Standpunkt der Resonanztheorie aus völlig willkürliche, formale Darstellung, die ebensogut durch eine andere, z. B. (1) ersetzt werden kann. Wenn das Hauptinteresse nicht den Intensitätsschwankungen zugewandt ist, sondern gefragt wird, welche Töne da sind, so ist im Außenraum (1) nicht nur der Form (2) vorzuziehen, sondern es ist vom Standpunkt der Resonanztheorie aus sogar die einzig mögliche Form, und für das Innenohr reicht weder die Darstellung (1) noch (2) zur Beantwortung der gestellten Frage aus.

§ 3. Schwebungskurven bei ungleichen Amplituden der Primärtöne.

Bevor wir der Frage näher treten, welche Töne bei Schwebungen gehört werden, müssen wir noch kurz die Schwebungskurven mit ungleichen Amplituden der Primärtöne betrachten, zumal gleiche Amplituden in Wirklichkeit die Ausnahme bilden. Ich schicke aber voraus, daß wir hierbei auf die Hauptschwierigkeiten nicht näher eingehen und uns auf die Erörterung des Notwendigsten beschränken.

Wir schreiben mit Helmholtz[1]) den Ausdruck

$$y = A \sin 2\pi p t + B \sin 2\pi q t \qquad (3)$$

in der Form

$$y = C \sin (2\pi (p t - \varepsilon)), \qquad (4)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A + B \cos 2\pi (p-q) t &= C \cos 2\pi \varepsilon \\ B \sin 2\pi (p-q) t &= C \sin 2\pi \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

also

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 2\pi (p-q) t} \qquad (5')$$

und

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{B \sin 2\pi (p-q) t}{A + B \cos 2\pi (p-q) t} \qquad (5'')$$

ist. C und ε sind langsam veränderliche Funktionen der Zeit. Entsprechend wird (4) von Helmholtz, Taylor[2]) und anderen als ein in der Höhe allmählich sich ändernder „Ton" mit veränderlicher Amplitude gedeutet, wobei die Tonhöhe in jedem Moment durch den Ausdruck

$$p - \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{pA^2 + qB^2 + (p+q)AB \cos 2\pi (p-q) t}{A^2 + B^2 + 2AB \cos 2\pi (p-q) t}$$

gegeben ist. (6)

Inwieweit die Helmholtzsche und Taylorsche Darstellung im einzelnen zutreffend ist, wollen wir hier nicht untersuchen. Jedenfalls ist in der durch (3) oder (4) dargestellten Resultierenden die Schwingungszahl nicht konstant, sondern veränderlich. Als Beispiel wählen wir (wie in Fig. 1 und 2) $p = 5$ und $q = 4$, aber $A : B = 3 : 2$.

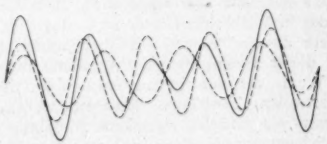


Fig. 5.

1) Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, 5. Ausg., Beilage XIV. Daß Helmholtz mit Geschwindigkeiten und nicht mit Elongationen gerechnet hat, ist für unsere Zwecke unwesentlich.

2) S. Taylor, Phil. Mag. **44**, 56, 1872.

Ein Vergleich der Fig. 1 und 5 zeigt folgendes: Während für $A = B$ die Schwingungszahl der Resultierenden $= \frac{p+q}{2}$ ist, bis auf die eine Schwingung im Minimum, die in die höhere Oktave $p+q$ umspringt, ist für $A > B$ die Schwingungszahl im Minimum zwar $> p$, aber $< p+q$ und im Maximum $< p$, aber $> \frac{p+q}{2}$; die angegebenen Zahlen immer multipliziert mit der Periodenzahl. Je größer das Verhältnis $A:B$ wird, um so näher rückt die Schwingungszahl der Resultierenden sowohl im Minimum als auch im Maximum an p heran.

Ist umgekehrt $A < B$ für $p = 5$ und $q = 4$, so ist die Schwingungszahl im Minimum $< q$, während sie im Maximum zwar $> q$, aber $< \frac{p+q}{2}$ ist.

Wir können uns mit der Behandlung dieses einen Beispieles begnügen, da aus ihm die für unsere Zwecke wesentlichen Punkte bereits klar zu ersehen sind.

Budde bringt Gleichung (3) auf die Form

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 2\pi(p-q)t}\,. \quad (7)$$
$$\sin\left[2\pi\frac{p+q}{2}t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{A-B}{A+B}\operatorname{tg} 2\pi\frac{p-q}{2}t\right)\right]$$

und deutet (7) ebenso wie (2) als Schwingung von der Kreisfrequenz $2\pi\frac{p+q}{2}$ mit variabler Amplitude. Auch in seiner letzten Arbeit hält er ausdrücklich an seiner Deutung von (7) fest und erweitert damit noch die von Helmholtz, Taylor, Starke[1]) und anderen auf Grund von (2) geübte Art der Herleitung von Tönen. Mir ist die Buddesche Auffassung in bezug auf (7) nicht verständlich und meines Erachtens lehrt allein schon das oben Gesagte und ein Blick auf Fig. 5, daß sie unhaltbar ist.

§ 4. Über die Höhe der gehörten Töne.

Wir wollen annehmen, daß eine im Außenraum verlaufende Schwebungswelle unverzerrt in das Innenohr übertragen wird. In der Regel ist das in Wirklichkeit zwar nicht der Fall, für unsere Zwecke können wir aber unbedenklich mit dieser vereinfachenden Annahme rechnen.

Wenn wir nun irgend etwas über die zu erwartenden Tonhöhen aussagen wollen, so müssen wir zunächst irgendeine Annahme über die Schwingungsvorgänge im Innenohr und über die Art der Reizung der Hörnerven machen. Vom Standpunkte der Resonanztheorie des Hörens aus ist dann folgendes zu erwarten: Je nach dem Grade der Dämpfung der Ohrresonatoren muß die Größe des Intervalls, bei welchem noch Schwebungen zu hören sind, verschieden sein. Wäre die Dämpfung so gering, daß bei einem Abstand von einer Schwingung zwischen einem erregenden Ton und dem Eigenton eines Ohrresonators ein merkliches Mitschwingen desselben nicht mehr stattfindet, so müßten schon bei Schwebungskurven, deren Primärtöne um nur zwei Schwingungen auseinanderliegen, für das Gehör die Schwebungen verschwinden, und die beiden Primärtöne müßten glatt abfließend, ungestört nebeneinander gehört werden.

Tatsächlich sind aber auch bei verhältnismäßig großen Intervallen Schwebungen zu hören, so daß, entsprechend den physiologischen Verhältnissen, eine ziemlich bedeutende Dämpfung der Ohrresonatoren angenommen werden muß. Um einen Überblick zu bekommen, stellen wir uns der Einfachheit halber das Mitschwingen der Ohrresonatoren zunächst sehr schematisch so vor, als ob immer nur ein Resonator gleichzeitig von beiden Primärtönen in Schwingungen versetzt würde. Der Ausdruck (1) oder (2) bzw. (3) oder (4) oder (7) soll jetzt die Schwingungsform dieses Ohrresonators darstellen. Welche Höhe der zugehörige Ton hat, bzw. ob überhaupt nur ein einzelner Ton von konstanter Höhe vorhanden ist, läßt sich aber aus den Ausdrücken (2) oder (4) oder (7) ebensowenig schließen, wie aus (1) oder (3).

Zur Feststellung der Tonhöhe sind vielmehr noch weitere Hypothesen notwendig, oder richtiger, wir müssen experimentell prüfen, was man hört und uns das Gehörte durch Zusatzhypothesen zur Resonanztheorie des Hörens verständlich zu machen suchen. Hierfür sind schon in meiner früheren Arbeit zwei Möglichkeiten diskutiert worden[1]). Die erste, wahrscheinlichere, ist die, daß die Lehre von den spezifischen Sinnesenergien auch in der speziellen Helmholtzschen Fassung richtig ist. Dann bringt jeder Nerv, wie er auch erregt wird, immer die gleiche Tonhöhe zur Empfindung. Sowohl im Falle (2), wo die Schwingungszahl zur Zeit der Minima in die höhere Oktave umspringt, als auch im Falle (4), wo sich die Schwingungszahl vom Maximum zum Minimum dauernd ändert, könnte dann nur ein konstanter Ton gehört werden. Die zweite, unwahrscheinlichere, Möglichkeit ist die, daß die Helmholtzsche Lehre von den spezifischen Sinnesenergien falsch ist, und dann ist die nächstliegende Annahme die, daß der gereizte Nerv in jedem Moment die Tonhöhe zur Empfindung bringt, die der jeweiligen Schwingungsdauer entspricht.

1) H. Starke, Verh. d. D. phys. Ges. 10, 285, 1908.

1) Waetzmann I, S. 236.

Auch Helmholtz operiert gelegentlich mit dieser Annahme. Er gibt an, daß für ungleiche Amplituden der Primärtöne ein Schwanken der Höhe „des" schwebenden Tones zu hören sei, und führt das auf die Änderung der Schwingungsdauer in der Resultierenden, wie sie Gleichung (4) zeigt, zurück. Hierbei läßt Helmholtz außer acht, daß er damit seiner Lehre von den spezifischen Sinnesenergien widerspricht. Ferner aber nimmt er stillschweigend, und Taylor[1]) ausdrücklich, an, daß bei gleichen Amplituden der Primärtöne ein Schwanken der Tonhöhe nicht stattfinden könne, weil hier die Schwingungsdauer durchweg konstant $= \frac{2}{p+q}$ sei, eine Behauptung, die, wie wir in § 2 gesehen haben, irrig ist und auf die einseitige Betrachtung des Faktors $\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$ in der Darstellung (2) für die Resultierende zurückzuführen ist.

Es ist das Verdienst Buddes, in einer sehr interessanten früheren Arbeit[2]) auf eine Möglichkeit hingewiesen zu haben, Tonhöhenschwankungen bei Schwebungen auch ohne Verletzung des Prinzips der spezifischen Sinnesenergien herzuleiten. Budde versucht diese Herleitung auf Grund der allgemein geltenden und von O. Fischer[3]) weiter gebildeten Vorstellung, daß nicht ein einzelner Ohrresonator die schwebenden Schwingungen ausführt, sondern immer ein ganzer Bereich. Wenn ich mich auch mit den Buddeschen Ausführungen in der zitierten Arbeit im einzelnen durchaus nicht identifizieren möchte, so scheint mir mit ihnen doch ein wichtiger neuer Hinweis für die Weiterentwicklung unserer Anschauungen über die Tonhöhen bei Schwebungen gegeben zu sein.

Das bisher vorliegende experimentelle Material über die Tonhöhe bei Schwebungen ist äußerst dürftig. Es würde uns hier zu weit führen, auf die Einzelheiten einzugehen. Es sollte nur besprochen werden, welche Möglichkeiten für die Herleitung der Schwebungstöne vom Standpunkte der Resonanztheorie des Hörens aus vorliegen.

Im wesentlichen ist das in diesem Paragraphen Gesagte eine Wiederholung von Dingen, die ich bereits in meiner früheren Arbeit ausgeführt habe[4]). Diese Wiederholung war aber notwendig, weil die Arbeit Buddes in folgenden 2 Bemerkungen gipfelt[5]):

1. Für das Auftreten eines zwischen den Primärtönen liegenden schwebenden Tones gebe Gleichung (1) (bei Budde Nr. 7) für sich allein durchaus keinen Anhalt; „man muß, um es zu erklären, die Unschärfe der Resonanz im Ohre zu Hilfe nehmen".

2. Neben dem Ohmschen Gesetz komme „für jeden, der sich auf die Grundlage der Helmholtzschen Theorie stellt, das Prinzip der spezifischen Sinnesenergien in Betracht, und zwar mit gleicher Berechtigung wie jenes".

Wer meine frühere Arbeit nicht gelesen hat, muß aus der Buddeschen Darstellung schließen, daß ich gegen die zitierten Sätze verstoßen habe. Demgegenüber muß ich betonen, daß ich in den Buddeschen Bemerkungen absolut nichts finden kann, was meinen Ausführungen widerspricht, und was nicht im Gegenteil bereits von mir völlig klar und unmißverständlich auseinandergesetzt worden ist. In bezug auf Einzelheiten muß ich auf die Originalarbeiten verweisen und möchte zur Begründung des Gesagten nur einige besonders charakteristische Sätze zitieren.

Zu der 1. Buddeschen Bemerkung erinnere ich an die Sätze: „Da die auf das Ohr auftreffende Schwebungskurve durch die Ohrresonatoren in ihre ursprünglichen Bestandteile zerlegt wird, und da erst infolge der Dämpfung in den zwischen p und q liegenden Resonatoren neue schwebende Schwingungen entstehen ...."[1]), und an: „Wäre die Dämpfung der Ohrresonatoren so schwach, oder die Resonanzschärfe so ausgeprägt, daß auf jeden Ton nur eine einzige Faser anspräche, so müßten die beiden Töne glatt abfließend ohne Schwebungen nebeneinander gehört werden"[2]).

Zu der 2. Buddeschen Bemerkung möchte ich folgende Sätze anführen: „Es liegen nun zwei Möglichkeiten vor. Entweder, die Ohrresonatoren besitzen spezifische Energien im Helmholtzschen Sinne, d. h., jeder Ohrresonator bringt, wie er auch erregt werden mag, nur eine bestimmte Tonhöhe zur Empfindung. In diesem Falle müßte der schwebende Ton von konstanter Höhe sein ...."[3]). Ich habe dann des weiteren noch die von Budde gar nicht ins Auge gefaßte Möglichkeit diskutiert, daß die Lehre von den spezifischen Sinnesenergien in dem speziellen Helmholtzschen Sinne nicht richtig ist.

§ 5. Folgerungen aus den §§ 2—4.

In meiner früheren Arbeit habe ich es für irreführend erklärt, aus (2) das Auftreten eines

1) Taylor, l. c.
2) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 369, 1916. (Budde II.)
3) O. Fischer, Ann. d. Phys. (4) **25**, 118, 1908.
4) Waetzmann I, S. 234 ff.
5) Budde I, S. 288.

1) Waetzmann I, S. 236.
2) Waetzmann II, S. 92.
3) Waetzmann I, S. 236.

Tones von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ herzuleiten und habe allgemein gesagt, „daß das Auftreten eines Sinus als Faktor eines Produktes, dessen anderer Faktor auch eine Funktion der Zeit ist, das Vorhandensein eines Tones von der betreffenden Schwingungszahl weder physikalisch noch physiologisch verständlich zu machen vermag". Herr Budde hat nun darin recht, daß der Satz in dieser Fassung zu allgemein ist, denn es würde unter ihn auch der Ausdruck $e^{-bt}\sin 2\pi pt$ fallen, aus dem allgemein und mit Recht auf das Vorhandensein des Tones p geschlossen wird. Allerdings möchte ich darauf hinweisen, daß schon durch den Zusammenhang, in dem der Satz steht, Mißverständnisse ziemlich ausgeschlossen sind, und daß außerdem der herangezogene Spezialfall ausdrücklich ausgenommen wird mit den Worten[1]): „Ein langsam abklingender Ton wird ja auch als einfacher Ton empfunden, obwohl hier wie dort eine allmähliche Amplitudenänderung eintritt". Aber selbstverständlich hätte der Satz so formuliert sein müssen, daß er auch außerhalb des Zusammenhanges gelesen richtig bleibt. Demgemäß sei in dem zitierten Satz vor das Wort „Funktion" noch „periodische" hinzugefügt. Aber auch in dieser Fassung wird er von Herrn Budde bekämpft.

Budde behauptet, daß sich ein „Ton" mit periodisch veränderlicher Amplitude nur darstellen lasse in der Form $\varphi(t)\sin 2\pi pt$, worin $\varphi(t)$ eine periodische Funktion der Zeit sei, und hierbei könne $\varphi(t)$ ebensowohl ein Kosinus wie irgendeine andere periodische Funktion von t sein. Ich habe demgegenüber behauptet, daß ein „Ton", dessen Amplitude ein Kosinus oder eine andere periodische Funktion der Zeit ist, eben kein Ton ist, und daß zur Beantwortung der Frage, welche Töne da sind, das Produkt in Summen zerlegt werden muß.

Dem bereits in § 2—4 zur Begründung dieser Behauptung Gesagten habe ich nichts Wesentliches mehr hinzuzufügen. Für das, was man hört, ist, worüber wir uns mit Budde einig sind, für große $p-q$ die Summe maßgebend, und für kleine $p-q$ weder die Summe noch das Produkt — der beste Beweis für die Richtigkeit des zitierten Satzes, was das Innenohr anlangt. Im Außenraum ist er aber ebenso richtig, denn die Schwingungszahl der Resultierenden ist ja gar nicht konstant gleich der Periodenzahl des betreffenden Sinus oder Kosinus. Allerdings kann Budde einwenden, daß bei sehr langsamen Schwebungen die Schwingungszahl über größere Zeitabschnitte hin konstant $= \frac{p+q}{2}$ ist. Wenn ich aber solchen Zeitabschnitt herausgreife, betrachte ich eben nicht den Gesamtvorgang. Das wäre dasselbe, als wenn ich etwa bei Unterbrechungen eines Tones, die so schnell aufeinander folgen, daß ein komplizierter Klang entsteht, nur einen Zeitabschnitt betrachte, in dem der Ton gerade angegeben wird und nun behaupte, damit alles erledigt zu haben.

Vom Standpunkte der Resonanztheorie aus ist die Darstellung einer komplizierten Schwingung in einer Fourierschen Reihe die einzige, die etwas über die vorhandenen Tonhöhen aussagt. Ist nur ein einziger Ton da, so erübrigt sich die Zerlegung. So hat es z. B. keinen Sinn, eine Fouriersche Reihe anzusetzen, wenn etwa der gleiche Ton in Abständen von Minuten oder Stunden periodisch wiederkehrt. Welche Grundperiode anzusetzen ist, entscheidet letzten Endes das Experiment, indem geprüft werden muß, wann infolge von Unterbrechungen oder dergleichen nicht mehr ein einziger Ton konstanter Höhe gehört wird.

Wenn Herr Budde dem zitierten Satz seine im vorigen Paragraphen besprochenen Bemerkungen „gegenüberstellt", so scheint mir das einfach auf einem Mißverständnis zu beruhen, als hätte ich behauptet, daß durch die Summendarstellung jeder gehörte Ton erklärt werden könne, wovon in meiner früheren Arbeit aber gar keine Rede ist.

Die Darstellung (2) ist von mir auch mit Recht als „irreführend" bezeichnet worden, insofern als sie leicht zu der falschen Annahme verleitet, daß die Schwingungszahl der Resultierenden konstant $= \frac{p+q}{2}$ ist. Helmholtz, Taylor, Starke und andere haben diese Annahme tatsächlich gemacht und aus ihr unklare Folgerungen gezogen, denen sich Budde anschließt, während ich zwischen dem Buddeschen „Ton" mit periodisch veränderlicher Amplitude und einem allmählich an- oder abklingenden ($e^{-bt}\sin 2\pi pt$) Ton noch den großen Unterschied sehe, daß im zweiten Fall die Schwingungszahl konstant ist, im ersten nicht. Ich muß auch meine Kritik der Starkeschen Erklärung[1]), weshalb ein auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmter Resonator nicht mittönt, wenn er durch eine Schwingung von der Form (2) erregt wird, aufrecht erhalten. Budde schließt sich der Starkeschen Erklärung an und erläutert sie noch des Näheren dahin, daß ein Resonator auf $\frac{p+q}{2}$ in (2) mitschwingen

1) Waetzmann I, S. 235.

1) H. Starke, l. c.

wird, vorausgesetzt, daß er „empfindlich genug sei, die Erregung genügend anzunehmen und dabei dem Phasenwechsel der Amplitude zu folgen". Mir scheint dies doch eine recht unklare Vorstellung zu sein, auf die zurückzugreifen gar keine Veranlassung vorliegt. Wozu so vage und nicht definierte Begriffe wie die „Empfindlichkeit" eines Resonators einführen, wenn die exakt festgelegten Begriffe der Dämpfung und Resonanzschärfe zur klaren und erschöpfenden Darstellung des Vorganges ausreichen? Nach meiner Darstellung ist die Sachlage die: Der auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmte Resonator schwingt mit, wenn er so stark gedämpft ist, daß er auf die beiden Primärtöne p und q anspricht, und ein Mittönen kommt nicht zustande, wenn er so schwach gedämpft ist oder seine Resonanzschärfe so groß ist, daß er auf p und q nicht mehr merklich anspricht. Damit ist auch die Frage erledigt, warum bei gegebenem Intervall $p:q$ der eine Resonator mittönt, der andere nicht. Ich vermute, Herr Budde würde auch auf die Dämpfung zurückgreifen, wenn er die „Empfindlichkeit" des Resonators näher zu definieren versucht.

Zusammenfassend möchte ich bemerken, daß ich die Bedenken, die Herr Budde gegen einige Ausführungen meiner früheren Arbeit hegt, nicht teile. Ferner möchte ich aber hervorheben, daß hier nicht der Ort und die Gelegenheit war, den Wert der Buddeschen Arbeiten zu würdigen, sondern daß es nur darauf ankam, die Punkte klarzustellen, in denen unsere Ansichten scheinbar oder in Wirklichkeit auseinander gehen.

Breslau, Physikalisch. Institut. Septbr. 1917.

(Eingegangen 2. Oktober 1917.)

Nachtrag zu meinem Aufsatz: Zur Akustik der Atmosphäre [1]).

Von E. Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.)

Die in den §§ 2 und 3 durchgeführte Klarstellung des Vorganges der Energieausbreitung ist nicht durchaus neu. Auf ihre prinzipielle Neuheit schloß [2]) ich daraus, daß in der neuesten Literatur unklare und — wie ich erkannte — unrichtige Vorstellungen über diesen Vorgang unwiderlegt vorlagen und diskutiert wurden, um deren Beseitigung mir eben zu tun war.

Den charakteristischen Amplitudenfaktor $e^{\frac{\alpha x}{2}}$, auf den es dabei in erster Linie ankommt, haben bereits früher gefunden: Poisson [1]), Rayleigh [2]) und Lamb [3]). Überflüssig erscheint meine Durchrechnung trotzdem nicht. Denn Poisson rechnet noch mit isothermen Zustandsänderungen in der Schallwelle und sein mathematischer Apparat würde im adiabatischen Fall, in dem kein Geschwindigkeitspotential existiert [4]), versagen. Rayleigh und Lamb behandeln nur den eindimensionalen Spezialfall vertikaler Wellen [5]), wobei Lamb in anderer Hinsicht viel allgemeinere Annahmen macht (Temperaturgefälle, stetig zunehmende Reibungsdämpfung), ohne übrigens seine Ergebnisse physikalisch zu verwerten.

Erwähnt sei noch, daß Lamb in einer zweiten interessanten Arbeit [6]) über jene Wellentypen berichtet, die ich — als für akustische Fragen belanglos — beiseite gelassen habe [7]), jene nämlich, deren Wellenlänge nicht klein ist gegen die virtuelle Höhe der Atmosphäre.

(Eingegangen 2. November 1917.)

Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe.

Von Irene Parankiewicz.

§ 1. Zweck der Untersuchung.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung der Wirkung strahlender Energie auf die Materie wurden gewisse interessante Erfahrungen bezüglich der Größenbestimmung kleiner Materieteilchen nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze und aus der Farbe des von ihnen im Dunkelfelde abgebeugten Lichtes, sowie bezüglich der von diesen getragenen elektrischen Ladungen gesammelt, die im folgenden dargestellt werden sollen.

Die Versuche sind nach der Methode von Ehrenhaft im reinsten Argon [1]) ausgeführt

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **18**, 445, 1917.
2) Der Aufsatz ist im Feld entstanden.

1) Poisson, „Mémoire sur la théorie du son". Journal de l'École Polytechnique, T. VII (1807).
2) Rayleigh, Phil. Mag. (4) **29**, 173, 1890.
3) H. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. II, **7**, 122, 1909.
4) Schrödinger, l. c. S. 449, Anmerkung.
5) Schrödinger, l. c. § 2.
6) H. Lamb, Proc. Roy. Soc. Lond. (Ser. A). **84**, 1911.
7) Schrödinger, l. c., S. 448, linke Spalte, Mitte und S. 449, linke Spalte, Mitte.

1) Das Argon aus der Bombe, bezogen von Linde, München-Hellriegelskreuth, das noch 30 Proz. Stickstoff und 0.5 Proz. Sauerstoff enthielt, wurde zur weiteren Rei-

worden. Zur Darstellung der Probekörper wurde aber statt des bisher üblichen elektrischen bzw. mechanischen Zerstäubens die Methode des Verdampfens der betreffenden Substanz verwendet, eine Darstellungsweise, die dort, wo sie anwendbar ist, jedenfalls am einfachsten zum Ziele führt. Der Dampf kondensiert zu kleinen Kugeln, die im Dunkelfelde sichtbar werden und sich in einem Kondensator nach dem bekannten Verfahren im Schwere- und elektrischen Felde behandeln lassen.

Aus der Fallgeschwindigkeit läßt sich der Radius des kugelförmigen Probekörpers nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz berechnen. In unserem Falle, da die Reibungsverhältnisse bei der Fallbewegung eines Teilchens im Argon, einem einatomigen Gase, besonders einfach sein müssen, worauf H. Rubens schon auf dem Solvay-Quantenkongreß 1911 aufmerksam gemacht hat[1]), könnte man die Ergebnisse dieser Art der Größenbestimmung allein als vollkommen zuverlässig ansehen. Nun existieren aber für die Richtigkeit dieser Berechnung noch andere, unabhängige Kriterien, welche erstens in der Übereinstimmung der vorerwähnten Größenbestimmung submikroskopischer, metallischer Partikel mit jener aus der Farbe des von ihnen abgebeugten Lichtes[2]), und zweitens in der Tatsache zu erblicken sind, daß — wie Ehrenhaft weiters auseinandergesetzt hat[3]) — das Maximum der lichtpositiven Photophorese (der größten Fortführungsgeschwindigkeit der Partikel im Strahl) bei denjenigen Silberkugeln eintritt, deren Radien sich aus dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz und aus der Resonanzfarbe zu $9{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm bzw. zu $9{,}0 \cdot 10^{-6}$ cm ergeben, also gerade bei jenen Größen der Silberkugeln, an welchen die Theorie nach K. Schwarzschild[4]) und P. Debye[5]) das Beugungsmaximum der Strahlung, und infolgedessen die stärkste Wirkung, erwarten läßt.

Alle diese Untersuchungen über die Größenbestimmung der submikroskopischen Partikel nach den drei verschiedenen Methoden sind bisher nur an Metallen durchgeführt worden. Deswegen ist es interessant, die Erscheinungen der optischen Resonanz an dielektrischen Kugeln auch zur Größenbestimmung derselben heranzuziehen, das heißt nach der Beugungstheorie des Lichtes an einer Kugel im Grunde der Entwicklungen von G. Mie[1]) den Zusammenhang zwischen den Farben des zerstreuten Lichtes und den Größen der zerstreuenden Kugeln zu berechnen, und die Größe, die auf diesem Wege für ein Partikel bestimmter Farbe resultiert, mit jener zu vergleichen, die sich für dasselbe aus seiner Fallgeschwindigkeit nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz ergibt. Als Versuchssubstanz wurde zunächst Schwefel gewählt.

Um ferner ein weiteres Kriterium für den Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes zu bekommen, wurden die farbigen Schwefelkügelchen auch bei verschiedenen Drucken behandelt, ihre Größen nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz für diese Drucke berechnet und mit den Ergebnissen der optischen Theorie für Kugeln der betreffenden Farbe verglichen.

Über die Gültigkeit der gewonnenen Resultate erhält man weitere Aufklärung durch Erörterung der Frage, inwiefern die Art der Herstellung die Beschaffenheit der Partikel beeinflussen könnte; deshalb wurde auch eine Substanz, deren Partikel durch das elektrische sowie das mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen darstellbar sind, das Quecksilber, untersucht. Dadurch wird die Möglichkeit geboten, den teils schon vorhandenen, teils neu gewonnenen Resultaten am elektrisch und mechanisch zerstäubten Quecksilber diejenigen Erfahrungen, die sich am verdampften ergeben werden, gegenüberzustellen.

§ 2. Untersuchungen am Schwefel.

a) Resonanzfarben und Größenbestimmung.

Die durch das Verdampfen von Schwefel hergestellten kolloidalen Kügelchen[2]) zeigen im Dunkelfeld sehr schöne Resonanzfarben in den Abstufungen von Blau bis Orange. Die Fallgeschwindigkeit der blauen Partikel ist die kleinste; dies weist darauf hin, daß diese Kügelchen auch die kleinsten sein müssen; die grünen Partikel fallen rascher, sie sind größer; noch größere Fallgeschwindigkeit besitzen *Na*-gelbe Teilchen.

---

nigung im elektrischen Ofen über Polzeniussche Masse zur Absorption des restlichen Stickstoffes und anderer aktiver Gase, sodann über mehrere Trocknungsvorlagen aus H_2SO_4 und P_2O_5, über elektrische Öfen mit *Cu*-Spiralen (Bindung von O_2), CuO (Absorption von Wasserstoff), schließlich über glühendes metallisches *Ca* (Absorption der Reste von Stickstoff) und unmittelbar vor der Apparatur über zwei P_2O_5-Röhren und Vorlagen aus Glaswolle geleitet.

1) P. Langevin et M. de Broglie, La théorie du rayonnement et les quanta. Réunion tenue à Bruxelles sous les auspices de M. E. Solvay 1911, S. 150.

2) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914 und **16**, 227, 1915; G. Laski, Wiener Akademieberichte und Ann. d. Phys. **53**, 1, 1917.

3) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **18**, 352, 1917.

4) K. Schwarzschild, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. **31**, 293, 1901.

5) P. Debye, Ann. d. Phys. **26**, 57, 1909.

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908.

2) Die Mikrophotographien solcher Schwefelkügelchen hat F. Ehrenhaft in dieser Zeitschr. **18**, 352, 1917 veröffentlicht.

Die gelben Farben gehen dann allmählich an den noch rascher fallenden Kügelchen ins Orange über; rote Partikel sind nicht vorhanden. Die am raschesten fallenden Teilchen zeigen eine gelblich-weiße Farbe, welche der Eigenfarbe des Schwefels im reflektierten Licht entspricht.

Für diese durch selektive Zerstreuung des Lichtes an den Schwefelkügelchen zustande kommenden Farbenphänomene (optische Resonanz) ergeben sich nach der Beugungstheorie des Lichtes als Resultat langwieriger Rechnungen[1]) folgende Kurven, die den Zusammenhang zwischen der Intensität des abgebeugten Lichtes verschiedener Wellenlängen und der Größe der beugenden Partikel darstellen.

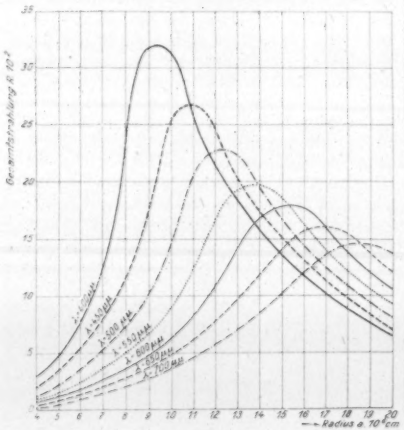


Fig. 1. Optische Resonanz der Schwefelpartikel.

1) Die Berechnungen sind nach den von G. Mie (l. c., S. 412—415) angegebenen Formeln ausgeführt worden. Es war dazu die Berücksichtigung von drei elektrischen und zwei magnetischen Partialwellen erforderlich. Die Brechungsexponenten des amorphen Schwefels als Funktionen der Lichtwellenlängen sind der Abhandlung von H. E. Mervin und E. L. Larsen (Amer. Journ. Soc. [4] **34**, 43) entnommen:

λ in $\mu\mu$	n
400	2,080
450	2,060
500	2,030
550	2,010
600	1,992
650	1,980
700	1,970

Zur Berechnung der Reihen fv, fv', gv, gv' wurden 6—7 Glieder berücksichtigt. Ausführliche Angabe der berechneten Partialwellen erfolgt in den Berichten der Wien. Akad. d. Wiss.

Als Abszissen sind die Radien, als Ordinaten die Intensitäten der Gesamtstrahlung verschiedener Wellenlängen, die von einem Kubikmillimeter einer Suspension im Gas von der Konzentration $C = 10^{-6}$ (1 mm³ in 1 Liter) ausgeht, aufgetragen. (Vgl. Mie, l. c. S. 422.)

Will man aus einer beobachteten Farbe auf die Größe des zerstreuenden Körpers schließen, dann ist es übersichtlicher, die Intensitäten des seitlich ausgestrahlten Lichtes als Funktionen der Wellenlängen für jeden Radius darzustellen, was in Fig. 2 durchgeführt ist.

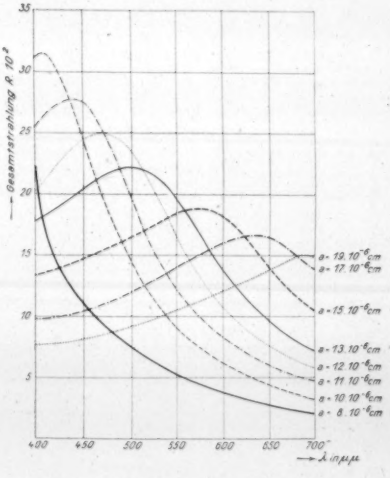


Fig. 2. Ausstrahlungskurven der submikroskopischen Schwefelpartikel.

Die Maxima dieser Kurven entsprechen den Wellenlängen des von den Partikeln der betreffenden Größe am intensivsten ausgestrahlten Lichtes.

Auf diesem Wege erhält man also theoretisch im Dunkelfelde folgendes Bild der Schwefelpartikel:

Kleinste Kügelchen zerstreuen eine gesättigte blaue Farbe; größere beugen das grüne, noch größere das gelbe Licht ab; ganz große Teilchen erscheinen orange. Zwischen den Radien der Schwefelkügelchen und den zugehörigen selektiv zerstreuten Farben ergibt sich also nach der Beugungstheorie folgende Zuordnung:

Radius	Farbe
8—10 · 10⁻⁶ cm	blau
10—12	grün
12—13	grüngelb
13—15	gelb
15—19	orange
über 19	Eigenfarbe des Schwefels

Die Theorie bestätigt demnach zunächst qualitativ das im Dunkelfelde zur Beobachtung gelangende Bild der Partikel und die Schlüsse, die aus der beobachteten Zuordnung der Farben und Fallgeschwindigkeiten auf die Reihenfolge der Größen der Teilchen gezogen werden konnten.

Tabelle I enthält die quantitativen Ergebnisse der experimentellen Größenbestimmung der untersuchten Partikel[1]) nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze.

Tabelle I.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $vf \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=0$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=1$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus der optischen Theorie	Ladungen $e \cdot 10^{10}$ el.-st. E. $f=0$	Ladungen $e \cdot 10^{10}$ el.-st. E. $f=1$
Normaler Druck.							
19		0,27	8,27	6,06		+ 0,91	0,35
17		0,29	8,70	6,40		— 0,24	0,09
8	blau	0,30	8,86	6,57	8—10	+ 0,83	0,34
42		0,33	9,42	7,07		+ 0,42	0,18
9		0,34	9,65	7,25		— 0,31	0,13
29		0,38	10,34	7,87		+ 0,61	0,27
31	grün	0,42	11,02	8,47	10—12	+ 1,59	0,73
32		0,42	11,02	8,47		— 0,76	0,34
25		0,43	11,20	8,62		+ 1,33	0,56
6	grüngelb	0,52	12,62	9,02	12—13	— 0,84	0,41
21		0,59	13,65	10,88		+ 4,55	2,30
3		0,66	14,64	11,80		+ 0,32	0,17
34	gelb	0,67	14,77	11,92	13—15	— 0,85	0,45
23		0,70	15,14	12,28		+ 0,96	0,51
12		0,77	16,06	13,12		+ 1,77	0,97
28		1,04	19,20	16,12		+ 5,12	3,03
14	orange	1,06	19,43	16,32	15—19	+ 1,44	0,85
10		1,08	19,64	16,54		— 4,65	2,77
11		1,19	20,80	17,62		+ 2,12	1,29
4	weiß	1,24	21,30	18,12	über 19	+ 1,18	0,72
Druck: 496 mm *Hg*.							
60	blau	0,44	9,86	6,87	8—10		
63	grün	0,52	11,08	7,87	10—12		
59	gelb	0,85	15,36	11,60	13—15	+ 4,08	1,76
61	orange	1,32	20,29	16,08	15—19	+ 7,67	3,83
Druck: 354 mm *Hg*.							
43	blau	0,55	10,02	6,68	8—10		
47	grüngelb	0,81	13,20	9,15	12—13		
44	orange	1,55	20,50	15,38	15—19	—14,00	5,90
Druck: 143 mm *Hg*.							
53	grün	1,25	11,30	6,55	10—12		
49	grüngelb	1,36	12,20	7,10	12—13	— 2,42	0,48
54	gelb	1,77	15,10	9,10	13—15	+ 0,27	0,06
50	orange	2,32	18,70	11,70	15—19	— 1,98	0,48
52		2,35	18,88	11,80		+ 0,93	0,23
51	weiß	4,07	28,45	19,10			
Druck: 55 mm *Hg*.							
56	blau	2,48	10,75	5,20	8—10	— 0,19	0,02
55		2,68	11,50	5,75		— 0,09	0,01
57	grün	3,00	12,65	6,40	10—12	+ 0,23	0,03
58	weiß	3,96	31,40	21,70		+ 2,81	0,77

1) Die Messungsprotokolle dieser Partikel gelangen in den Berichten der Wien. Akad. d. Wiss. zur Publikation

Aus dieser Tabelle ergeben sich folgende Tatsachen:

Der feinstverteilte kolloidale Schwefel liefert blaue Partikel, deren Radien sich aus dem Widerstandsgesetze zu 8,3 — 10,0 · 10⁻⁶ cm ergeben; größere Teilchen strahlen seitlich grünes Licht aus; ihre ebenso ermittelten Radien liegen zwischen 10,3 und 11,2 · 10⁻⁶ cm; noch größere Kügelchen sind gelbgrün und gelb. Die größten Kugeln, die noch eine spektrale Farbe zerstreuen, sind orangefarbig und weisen zufolge des Widerstandsgesetzes Radien zwischen 16 und 20,8 · 10⁻⁶ cm auf.

Schließlich reflektieren Teilchen über dieser Größe die Eigenfarbe des Schwefels[1]).

Vergleichen wir mit diesen aus der Fallgeschwindigkeit gefolgerten Radien die jedem Partikel aus der Farbe des zerstreuten Lichtes zugehörigen, dann kommen wir zu dem Schlusse, daß die nach dem Widerstandsgesetze ($f=0$) sowohl bei normalem Drucke wie auch bei tieferen Drucken[2]) berechneten

1) Auf diesem Wege ist also die für die Mineralogie wichtige Frage nach der Existenz des kolloidalen blauen und grünen Schwefels theoretisch und experimentell entschieden. Von diesem Standpunkte aus kann die Behauptung von C. Doelter (Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. [I] **124**, 37, 1915), daß die verschiedenen Färbungen des Ultramarins dem Überschuß farbigen kolloidalen Schwefels zugeschrieben werden können, als begründet angesehen werden.

2) Die für den Druck 55 mm *Hg* nach Stokes-Cunningham berechneten Radien der blauen und grünen Partikel sind um ca. 10 Proz. größer als jene aus der optischen Theorie erschlossenen, was auch zu erwarten ist, denn die freie mittlere Weglänge der Gasmoleküle ist bei diesem Druck bereits groß gegen die Durchmesser der sich am Gase reibenden Kügelchen von der Größe 10 · 10⁻⁶; damit ist der Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes — wie M. Knudsen und S. Weber (Ann. d. Phys. **36**, 981, 1911) schon auf Grund rein mechanistischer Versuche nachgewiesen haben — überschritten.

Vergleicht man nämlich den durch jenes Gesetz gegebenen Faktor

$$\left(1 + 0{,}815 \frac{l}{a}\right)$$

mit dem des empirischen Gesetzes von Knudsen-Weber

$$\left(1 + \left[0{,}683 + 0{,}354 \cdot e^{-1{,}845 \cdot \frac{a}{l}}\right] \cdot \frac{l}{a}\right),$$

so ergibt sich, daß diese Faktoren für $\frac{l}{a} = 2$ einander

Radien der Schwefelpartikel mit denjenigen, die sich aus der optischen Resonanz ergeben, ausgezeichnet übereinstimmen.

Damit ist der Beweis geführt, daß das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz (Grenzfall $f = 0$) für Metalle und Dielektrika unabhängig von dem widerstehenden Medium bei Kugeln von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} cm auch bei verschiedenen Gasdrucken richtige Werte der Radien ergibt[1]).

Gleichzeitig ist in dieser Übereinstimmung beider unabhängigen Methoden zur Berechnung der Größe der Partikel sowie in der eindeutigen Zuordnung ihrer Fallgeschwindigkeiten und der Wellenlängen des von ihnen zerstreuten Lichtes ein weiterer Beweis dafür zu erblicken, daß die Dichte aller Partikel desselben Materials gleich und gleich der Dichte der kompakten Substanz ist.

gleich werden, d. h. daß das Cunninghamsche Zusatzglied zum Stokesschen Widerstandsgesetze nur bis zu jenen Drucken als Korrektur ausreicht, bei welchen die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle von der Größenordnung der Teilchendurchmesser ist.

Beispielsweise wäre aus den vorliegenden Untersuchungen für den Druck 143 mm Hg — da der mittlere Radius der gemessenen Partikel $2 \cdot 10^{-5}$ beträgt — das Verhältnis $\frac{l}{a}$ ungefähr 3; die für diesen Druck errechneten Radien stimmen auch mit jenen aus der optischen Resonanz noch befriedigend überein. Bei dem Druck 55 mm Hg ist aber für blaue Partikel ($a = 10 \cdot 10^{-6}$ cm) $\frac{l}{a}$ bereits 14. In diesem Falle wird die weitere Korrektur des Widerstandsgesetzes, das von Knudsen und Weber eingeführte Exponentialglied $0{,}354 \cdot e^{-1{,}845 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l}{a}}$, von Einfluß, dessen Wert sich unter diesen Verhältnissen zu $0{,}311 \frac{l}{a}$ ergibt.

Berechnet man mit dieser Korrektur die Radien der blauen und grünen Partikel für den Druck 55 mm Hg, so ergibt sich:

Nr. des Partikels	Farbe	Radius $a \cdot 10^6$ cm	
		berechnet	aus der Farbe
56	blau	8,50	8—10
55		9,10	
57	grün	10,25	10—12

Diese Übereinstimmung der so gewonnenen Radien der Kugeln, die bereits klein gegen mittlere freie Weglänge sind, mit den Ergebnissen der optischen Theorie bildet einen neuen und von den mechanistischen experimentellen Erörterungen M. Knudsens und S. Webers vollkommen unabhängigen Beweis dafür, daß der Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes sich auf jenes Intervall beschränkt, in welchem die freie mittlere Weglänge der Gasmoleküle von der Größenordnung der Teilchendurchmesser ist und über dieses hinaus, wenn also l groß gegen a ist, die Knudsen-Webersche Korrektur mitberücksichtigt werden muß.

1) Bis zu der Radiengröße 10^{-4} cm hatte Mc Keehan (diese Zeitschr. **12**, 707, 1911) an den mikroskopisch ausgemessenen Wachskugeln durch Messung ihrer Fallgeschwindigkeiten in Luft bei verschiedenen Drucken das Widerstandsgesetz von Stokes-Cunningham für einen in der Nähe von $f = 0$ gelegenen Wert des Korrektionskoeffizienten als richtig nachgewiesen.

b) Die Ladungen der Schwefelkugeln.

Alle durch die Verdampfung hergestellten Partikel sind zunächst ungeladen, was dadurch kenntlich ist; daß ihre Fallbewegung durch ein elektrisches Feld nicht geändert wird; sie müssen erst mit Hilfe eines ionisierenden Präparates aufgeladen werden; demnach entsprechen alle am Schwefel gemessenen Ladungen — wie man im Sinne der Ionentheorie sagen würde — den aus dem ionisierten Gas aufgefangenen Elektrizitätsmengen (Ionen).

Aus den Kolonnen 7 und 8 der Tabelle I ist es ersichtlich, daß diese Ladungen meistens in die Größenordnung 10^{-11} el.-st. E. fallen[1]).

1) Es wurden ferner durch Verdampfung erzeugte Partikel des amorphen roten Selens untersucht. Auch hier sind auffallende Resonanzfarben vorhanden: Die kleinsten Partikel sind blau, größere zeigen rein spektrales Grün; bei noch größeren läßt sich die ausgeprägte *Na*-gelbe Farbe konstatieren. Die Orangefarbe ist schon ziemlich verwaschen und geht an größeren Partikeln in die typisch rötlichen Töne der Eigenfarbe des Selens über.

Die Messungen ergaben an dieser Substanz folgende Resultate:

Nummer des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Ladung $\varepsilon \cdot 10^{10}$ el.-st. E.
Normaler Druck.				
3	blau	0,48	7,28	+0,17
1		0,50	7,44	+0,21
19		0,51	7,57	+0,22
18	grün	0,59	8,35	+0,82
2		0,64	8,84	—0,23
22		0,67	9,08	—0,08
9		0,72	9,53	– 0,54
7	gelbgrün	1,12	12,62	+0,59
6	gelb	1,18	13,07	+1,31
10	orange	1,38	14,36	+0,75
21		1,45	14,82	+4,42
4		1,49	15,06	+6,07
20	rot	1,53	15,30	+2,03
11		1,64	15,97	+1,62
8		1,83	17,07	—1,49
Druck: 488 mm Hg.				
14	blau	0,66	7,63	
17	grün	0,81	8,86	+0,72
13	gelbgrün	1,12	11,10	
16	gelb	1,50	13,50	+0,36
12	orange	1,61	14,14	
15	rot	2,00	16,26	+1,03

Auch bei diesen Partikeln ordnen sich die Wellenlängen des zerstreuten Lichtes von den kürzeren zu längeren den wachsenden Fallgeschwindigkeiten zu, was wieder den Beweis der Gleichheit der Dichte aller Partikel liefert. Aus der ausgezeichneten Übereinstimmung der er-

§ 3. Untersuchungen am Quecksilber.

a) Drei Darstellungsmethoden der *Hg*-Partikel.

Als eine dritte Versuchssubstanz diente das Quecksilber. Das elektrisch und mechanisch zerstäubte *Hg* war schon öfters Objekt der Untersuchung; nur waren die Meinungen der Autoren über die Beschaffenheit der Partikel geteilt.

Ehrenhaft[1]) und Konstantinowsky[2]) fanden in den im elektrischen Lichtbogen hergestellten *Hg*-Partikeln vollkommene Kugeln metallischen Charakters mit blauen und gelblichen Resonanzfarben, deren Größe sich, nach zwei unabhängigen Methoden, aus dem Widerstandsgesetz und aus der Beugungstheorie übereinstimmend ergab. Unter anderen Beweisen der Reinheit der Substanz führen diese Autoren an, daß solche auf Glasplatten niedergeschlagene Kugeln zusammengerollt werden können und sich zu größeren Kugeln vereinigen.

Die Autoren, die das mechanisch zerstäubte Quecksilber behandelten[3]), glaubten Anhaltspunkte zu finden, daß die so hergestellten Partikel merklich verdampften, während sie bei elektrisch verteilten Partikeln dieses Verhalten nicht fanden.

In vorliegender Untersuchung, welche zum Teil auch unternommen wurde, um diese differierenden Behauptungen zu klären, wurden, um über die Beschaffenheit der *Hg*-Partikel entscheiden zu können, die Versuche mit den durch das elektrische bzw. mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen in reinsten, trockenen, inerten Gasen hergestellten *Hg*-Partikeln ausgeführt.

Als Resultat ergeben sich folgende Tatsachen:

1. Das Bild des im reinsten vollkommen trockenen Argon elektrisch zerstäubten Quecksilbers ist dem von Ehrenhaft beschriebenen Bilde solcher Partikel im reinen trockenen Stickstoff analog; die Untersuchung dieser Partikel konnte demnach nichts wesentlich Neues bieten.

2. Mechanisch habe ich das Quecksilber in reinstem Stickstoff mittels eines gläsernen Zerstäubers zerrissen. Diese Art der Zerteilung erweist sich aber als ziemlich ungünstig. Die Partikel sind meistens sehr groß; sie besitzen im reflektierten Licht die Eigenfarbe des metallischen Quecksilbers. Nur sehr selten wurden auch kleinere Kügelchen beobachtet, welche die für das kolloidale Quecksilber im Dunkelfeld charakteristische azurblaue Farbe zerstreuen. Für ein solches blaues Partikel (Nr. 13, Tabelle II) ergibt sich aus dem Widerstandsgesetz der Radius $a = 4{,}25 \cdot 10^{-6}$ cm, ein Wert, der in vollkommener Übereinstimmung mit dem aus der Beugungstheorie für blaue Partikel zu $3 - 4 \cdot 10^{-6}$ cm folgenden steht.

3. Zur Darstellung der Quecksilberpartikel ist — wie zu erwarten — die Verdampfungsmethode sehr geeignet. In einer Glaskugel von ca. 2 cm Durchmesser mit Zu- und Ableitungsrohr für den Argongasstrom wird ein Tröpfchen *Hg* einige Sekunden mit einem Bunsenbrenner erwärmt und sodann der Strom reinen Argongases wieder darüber geleitet, welcher die Tröpfchen in die Beobachtungskammer trägt. Auf diese Weise kommen neben wenigen größeren Partikeln hauptsächlich ganz kleine tiefblaue Kügelchen zum Vorschein, an welchen eine Reihe ausführlicher Messungen unternommen wurde.

Gemeinschaftlich für die Partikel aller Darstellungsmethoden ist die Gleichheit ihrer Beschaffenheit. Alle zeigen vollkommene Stabilität, unter den bei solchen Versuchen obwaltenden Umständen keine Spur des Verdampfens, eine ausgesprochen metallische Oberfläche und den Metallglanz; die kleinen Kügelchen in der Größenordnung $7 — 2 \cdot 10^{-6}$ cm besitzen auch charakteristische Resonanzfarben.

Das optische Bild des verdampften Quecksilbers im Dunkelfeld stimmt vollkommen mit dem der elektrisch zerstäubten *Hg*-Partikel überein. Die kleinsten Partikel sind tiefblau; sie liegen an der Grenze des Beobachtbaren und des bisher Erreichten[1]): ihre Radien ergeben sich zu $2 — 3 \cdot 10^{-6}$ cm. Die Resonanzfarben gehen dann über hellazurblau und gelblich zu stahlglänzend über. Die letztere Farbe entspricht den größten Partikeln, deren Radien bei ungefähr $7 \cdot 10^{-6}$ cm beginnen.

Tabelle II gibt die Messungsprotokolle einiger kleinster Partikel; Tabelle III die Übersicht aller im Argon gemessenen Quecksilberkugeln.

---

rechneten Radien der bei verschiedenen Drucken beobachteten Kügelchen gleicher Farbe, d. h. gleicher Größe, muß neuerlich auf die Richtigkeit und Anwendbarkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes geschlossen werden. Die am Schwefelkügelchen ausführlich besprochenen Ergebnisse wurden durch die Messungen am Selen erneut erhärtet.

1) E. Ehrenhaft, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, Nr. 22, 1187, 1913; Ber. d. Wien. Akad. **122**, 55, 1914; diese Zeitschr. **15**, 955, 1914 und **16**, 225, 1915.

2) D. Konstantinowsky, Ber. d. Wien. Akad. **123**, 1697, 1914.

3) R. A. Millikan, Phys. Rev. (4) **32**, 349, 1911; Ann. d. Phys. **50**, 729, 1916; Phys. Rev. (6) **8**, 595, Dezember 1916; A. Schidlof und A. Karpowicz, C. R. **158**, 199, 1914; diese Zeitschr. **16**, 42 und 372, 1915; Arch. sc. phys. nat. Genève **41**, Februar 1916; A. Targonski, Arch. sc. phys. nat. Genève **41**, März 1916; A. Schidlof und A. Targonski, diese Zeitschr. **15**, 376, 1916.

1) Die kleinsten von G. Laski (l. c.) gemessenen Silberkügelchen haben Radien von $4 \cdot 10^{-6}$ cm.

Tabelle II.

Fallstrecke $s = 11{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm.
Reibungskoeff. d. Argons bei 18° C $\mu = 2{,}219 \cdot 10^{-4}$
freie mittlere Weglänge bei 18° C $l = 10{,}29 \cdot 10^{-6}$ cm,
Reibungskoeff. d. Stickstoffs bei 18° C $\mu = 1{,}759 \cdot 10^{-4}$
freie mittlere Weglänge bei 18° C $l = 10{,}11 \cdot 10^{-6}$ cm,
Dichte des Quecksilbers $\sigma = 13{,}55$.

Fallzeiten	Steigzeiten	Fallzeiten	Steigzeiten
Positives *Hg*-Partikel Nr. 1 Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 2{,}475$		Negatives *Hg*-Partikel Nr. 10 Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 3{,}090$	
19,63 sec	28,90 sec	29,12	56,40 sec
19,60	30,05	45,90	53,20
30,48	30,10	35,90	48,13
26,70	30,90	39,40	46,28
27,00	39,90	39,15	47,49
31,40		30,00	52,54
Negatives *Hg*-Partikel Nr. 9 Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 2{,}400$		36,98	56,46
		39,98	
		47,72	
22,08 sec	12,80 sec	38,40	
14,90	10,00	Positives *Hg*-Partikel Nr. 12 Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 3{,}335$	
33,70	11,90		
37,20	16,30	33,67	41,90 sec
29,00		42,20	38,50
30,05		40,44	51,45
Negatives *Hg* Partikel Nr. 13 (mech. zerstäubt in N; azurblau) $\mathfrak{E} = 2{,}921$; $s = 17{,}13 \cdot 10^{-3}$ cm		35,37	45,31
		50,73	36,05
		33,40	45,53
20,15 sec	8,67 sec	39,84	51,70
20,06	10,10	48,45	
15,20	9,95		
20,74	8,90		
17,94	8,89		
19,75	10,16		
21,47	9,72		
17,45	9,38		
19,62	10,20		

Tabelle III.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $vf \cdot 10^2$ cm/sec	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=0$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=1$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus der optischen Theorie	Ladungen $e \cdot 10^{12}$ el.-st. E. $f=0$	Ladungen $e \cdot 10^{12}$ el.-st. E. $f=1$
12	tiefblau	0,28	2,03	1,16	bis 3	+ 0,268	0,051
10		0,30	2,15	1,25		— 0,309	0,061
9		0,41	2,73	1,67		— 1,52	0,34
1		0,44	2,89	1,77		+ 0,97	0,22
6	azurblau	0,50	3,24	2,00	3—4	+ 3,98	0,94
5		0,55	3,48	2,18		— 3,47	0,84
2		0,63	3,86	2,44		— 3,39	0,86
7	gelblich	0,97	5,32	3,58	über 4	— 8,01	2,44
8		1,08	5,72	3,91		+24,00	7,64
11		1,41	6,92	4,88		+24,10	8,46
3	stahl-	1,45	7,06	5,00		+29,70	10,60
4	glänzend	1,94	8,58	6,30		+37,60	14,19

Aus der Tabelle III ist zu entnehmen, daß die Werte der Radien für die durch Verdampfung hergestellten *Hg*-Partikel nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz ($f = 0$) mit denjenigen aus der Theorie der Resonanzfarben vollkommen übereinstimmen. Da sich dasselbe auch für ein durch das mechanische Zerreißen dargestelltes Partikel (Nr. 13, Tabelle II) ergibt, so ist dadurch ein Beweis für die gleiche Beschaffenheit, d. h. für den metallischen Charakter der *Hg*-Partikel aller Darstellungsarten in inerten trockenen Gasen gegeben.

b) Die Ladungen der Quecksilberkugeln.

Während das elektrische bzw. mechanische Zerreißen von Quecksilber elektrisch geladene Teilchen liefert, sind die durch die Verdampfung hergestellten Partikel sämtlich ungeladen. Da aber nach dieser Darstellungsmethode die kleinsten aller bisher behandelten Materieteilchen zustande kommen, so verdienen die ihnen durch ein ionisierendes Präparat aufgezwungenen Ladungen ein besonderes Interesse.

In einem elektrischen Felde von der Stärke $\mathfrak{E} = 3{,}3 \frac{\text{el.-st. E.}}{\text{cm}}$ steigen diese geladenen Kügelchen außerordentlich langsam (über eine Strecke von ungefähr $^1/_{10}$ mm in ca. 40 Sek.). Experimente mit solchen Kügelchen lassen sich, wie obige Messungsprotokolle zeigen, mit vollkommenster Präzision ausführen. Ihre Ladungen fallen in die Größenordnung 10^{-11} bis 10^{-13} el.-st. E. und zeigen mit immer kleiner werdender Kapazität der Quecksilberkügelchen (vgl. Tabelle III, Kolonne 4) ein deutliches Abnehmen (vgl. Tabelle III, Kolonne 7). Die kleinste auf einem Kügelchen vom Radius $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ gemessene Ladung beträgt

$2{,}68 \cdot 10^{-13}$ el.-st. E.

Durch diese Messungen ist also erneuert festgestellt worden, daß die Größe der Ladung mit der Kapazität des Trägers abnimmt und daß die von den Kügelchen kleinster erreichbarer Kapazität zur Zeit der Beobachtung wirklich getragenen Ladungen den 1800ten Teil des nach der Hypothese unteilbaren Elementarquantums $e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ el.-st. E. bilden.

§ 4. Zusammenfassung.

Die Untersuchungen über die Größenbestimmung der submikroskopischen Materieteilchen, die an den metallischen Partikeln drei untereinander übereinstimmende Methoden: das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz, die Resonanzfarben und die Bestimmung des Lichtdruckmaximums ergeben haben, sind in dieser Arbeit auch auf Dielektrika ausgedehnt worden.

Die aus den Resonanzfarben der Schwefelpartikel resultierenden Größen stimmen mit den nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze ($f = 0$) in seinem Gültigkeitsbereich berechneten Radien ausgezeichnet überein.

Da die Kügelchen gleicher Farbe auch gleich groß sind, bietet die Behandlung der farbigen Partikel bei verschiedenen Gasdrucken die Möglichkeit, das zur Berechnung ihrer Radien verwendete Widerstandsgesetz durch den Vergleich dieser Radien mit jenen, die aus der optischen Theorie resultieren, zu prüfen.

So ergibt sich an Schwefelkügelchen die Richtigkeit und Anwendbarkeit des nach Cunningham korrigierten Stokesschen Widerstandsgesetzes für jene Gasdrucke, bei welchen die freie mittlere Weglänge l der Gasmoleküle mit dem Teilchendurchmesser a vergleichbar ist. Bei tieferen Drucken, wo das Verhältnis $\frac{l}{a}$ groß ist, $\left(\text{z. B. } \frac{l}{a} = 14 \text{ für blaue Schwefelpartikel beim Druck 55 mm } Hg\right)$ muß man — wie schon auf Grund der Versuche von M. Knudsen und S. Weber zu erwarten ist — das weitere von diesen Autoren eingeführte Korrektionsglied des Widerstandsgesetzes berücksichtigen.

Ferner wurde in dieser Arbeit auch die Frage nach der Beschaffenheit der durch das elektrische bzw. mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen hergestellten Hg-Partikel untersucht. Es ergibt sich aus dem gleichen optischen Bilde dieser Partikel im Dunkelfelde und aus der Übereinstimmung der nach dem Widerstandsgesetz berechneten Radien der Partikel aller Darstellungsmethoden mit jenen aus der Theorie der optischen Resonanz, daß alle Hg-Partikel unabhängig von der Art ihrer Herstellung in inerten trockenen Gasen den metallischen Charakter und die Dichte des kompakten Metalles haben.

Die Verdampfungsmethode liefert nur ungeladene Partikel. Die an Schwefel- und Hg-Kügelchen gemessenen Ladungen entsprechen also den aus dem ionisierten Gas aufgefangenen Elektrizitätsmengen. Sie fallen an Schwefelkugeln der hier behandelten Größen meistens in die Größenordnung 10^{-11} el.-st. E., an den kleinsten Hg-Kügelchen in die Ordnung 10^{-13} el.-st. E.

Die vorliegenden Messungen liefern also einen Beweis dafür, daß Ladungen, die nur den 1800ten Teil des von der Theorie statuierten Elektrons betragen, noch eine reale Existenz zukommt.

Wien, I. physikal. Institut der Universität Juli 1917.

(Eingegangen 26. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie.

Von Gustav Mie.

(Fortsetzung.)

II.

Denken wir uns, eine Zusammenballung von Energie, ein „Energieknoten", den wir als materielles Teilchen bezeichnen, sei uns in einem ganz feldfreien Raum, in einem „idealen Vakuum", vollständig gegeben. Es sei uns also genau bekannt, wie die elektrischen Ladungen in ihm verteilt sind und nach welchem Gesetz die elektrische Feldstärke in ihm variiert, ebenso sei die Dichte der schweren Masse und das Gravitationsfeld mit allen 40 Komponenten überall bekannt. Wir wollen das alles zusammen kurz als „das innere Gefüge des materiellen Teilchens" bezeichnen. Nun möge dieses „materielle Teilchen" an eine Stelle geraten, wo Potentiale und Feldstärken merkbare Werte annehmen. Was wird das „äußere" Potential und das „äußere" Feld dann auf das innere Gefüge des Teilchens für einen Einfluß haben?

Solange man das Superpositionsprinzip für eines der fundamentalen Prinzipien der Ätherphysik hielt, kam man auf diese Frage überhaupt nicht. Denn da superponierten sich die Potentiale und die Feldstärken des äußeren Feldes einfach über die inneren Zustände des materiellen Teilchens, ohne daß an seinem Gefüge irgend etwas geändert wurde. Das wird nun aber ganz anders, wenn man das Superpositionsprinzip fallen läßt, wie es die Theorie der Materie verlangt. Nun ist das Teilchen in dem felderfüllten Raum überhaupt etwas ganz anderes als im idealen Vakuum. A priori wäre es denkbar, daß sich das Gefüge des Teilchens im felderfüllten Raum völlig umwandelt. Ich habe dafür in einer meiner Arbeiten zur Theorie der Materie ein sehr auffälliges Beispiel gefunden. Ich hatte, um einmal mit einem bestimmten Beispiel zu arbeiten, mit rein elektro-

magnetischen Größen, ohne die Gravitation einzuführen, eine Weltfunktion aufgestellt[1]), aus deren Annahme sich kugelförmige Zusammenballungen elektrischer Ladungen herleiten ließen, also gewissermaßen Elektronen. Diese Elektronen hatten aber die Eigentümlichkeit, daß sie nur in einem idealen Vakuum existenzfähig waren. In einem Gebiet, in welchem ein von Null verschiedenes elektrisches Potential existiert, selbst wenn damit kein elektrisches Feld verbunden wäre, also etwa in einem Gebiet, wie wir es praktisch im Innenraum eines elektrisch geladenen metallischen Hohlkörpers haben, könnten diese Elektronen nicht im innern Gleichgewicht sein, ihr Gefüge müßte sich aufzulösen suchen, die Elektronen müßten auseinanderfließen und sich mit den anderen in der Nähe vorhandenen elektrischen Teilchen zu verschmelzen suchen. Das ist natürlich ein ganz extremer Fall, aber man sollte doch im allgemeinen wenigstens sehr beträchtliche Einwirkungen der Potentiale auf die materiellen Elementarteilchen erwarten.

In der Wirklichkeit ist es nun aber gerade so, daß das Vorhandensein von Potentialen in dem Raum, in welchem sich ein Elementarteilchen befindet, auf dieses Teilchen einen so geringen Einfluß hat, daß man bisher überhaupt noch gar nichts davon wahrgenommen hat und daß man deswegen die Potentiale bisher meistens für rein mathematische Rechnungsgrößen, aber nicht für wirkliche physikalische Zustandsgrößen des Äthers, zu halten gewohnt ist. Über die Feldstärken läßt sich ganz Ähnliches sagen. Befindet sich das Teilchen in einem äußeren Feld, so kann nach der Theorie dieses Feld sich nicht den eigenen Feldstärken des Teilchens einfach superponieren, sondern man muß erwarten, daß sich das ganze innere Gefüge des Teilchens verändert. In Wirklichkeit dagegen bringt die äußere Feldstärke nur eine beschleunigte Bewegung des als materielles Teilchen bezeichneten Energieknotens hervor, es läßt aber sein inneres Gefüge so gut wie unangetastet. Denn die Experimentalphysik kann die Feldstärken bisher nur durch die beschleunigenden Kräfte nachweisen, die sie auf materielle Teilchen ausüben, aber nicht durch Veränderungen des inneren Gefüges der Teilchen.

Es bietet sich somit der Theorie der Materie das Problem, erstens zu untersuchen, wie die Weltfunktion gebaut sein muß, damit die Energieknoten, die sich nach ihr ergeben, sich wie feste, harte, wenig beeinflußbare Partikelchen verhalten, und zweitens den geringen Einfluß der äußeren Potentiale und Felder auf das innere Gefüge der Energieknoten, der vorhanden sein muß, zu berechnen.

Man wird dies Problem am besten so behandeln, daß man einzeln untersucht: den Einfluß eines von -1 verschiedenen Gravitationspotentials, den Einfluß eines Gravitationsfeldes, den Einfluß eines elektromagnetischen Viererpotentials, und endlich den Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Das Problem ist völlig gelöst für die Gravitation, dagegen steht man dem elektromagnetischen Teil des Problems noch ziemlich ratlos gegenüber.

Das Problem ist außerordentlich einfach zu erledigen für das Gravitationspotential. Die Gravitationstheorien, die in neuester Zeit aufgestellt worden sind, erfüllen alle ganz von selbst ein Axiom, welches ich das „Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials" genannt habe. Besonders einfach läßt sich dieses Prinzip durchführen, wenn das Gravitationspotential ein Skalar ist. In diesem Fall fordert das genannte Prinzip, wenn man von dem Gravitationspotential im idealen Vakuum -1 zu einem andern Potential $-a$ übergeht, daß dann alle Eigenschaften des Äthers, wie Dielektrizität, Permeabilität usw., durch die Existenz des Potentials $-a$ in der Weise beeinflußt werden, daß ihr Verhältnis zu den Werten im idealen Vakuum immer eine gewisse für jede der Größen besonders anzugebende Potenz von a ist. Auch im Innern der materiellen Elementarteilchen verändert sich alles in derselben Weise Nicht nur die physikalischen Konstanten des Äthers, sondern auch seine Zustände, also die Feldstärken, die Potentiale, die Dichte der Ladung und die der schweren Masse in dem durch das Gravitationspotential beeinflußten Teilchen stehen zu den entsprechenden Größen in entsprechenden Raum-Zeit-Punkten des unbeeinflußten Teilchens in konstanten Verhältnissen, die alle durch bestimmte Potenzen der Größe a anzugeben sind. Diese Veränderung sämtlicher Zustandsgrößen, die das „innere Gefüge" des Teilchens ausmachen, bringt es weiter mit sich, daß seine Dimensionen sich ändern. Zwei Punkte des dem Gravitationspotential ausgesetzten Teilchens haben eine andere Entfernung d', als die entsprechenden Punkte des unveränderten Teilchens, deren Entfernung ich d nennen will, und zwar ist $d' : d$ wiederum eine Konstante, nämlich eine bestimmte Potenz von a. Finden Bewegungen statt, so steht die Zeitdauer eines Ereignisses in dem veränderten Atom zu der des genau entsprechenden Ereignisses im unveränderten Atom auch in einem konstanten Verhältnis. Und da die Zeit nach dem Prinzip der Relativität der Bewegungen in die Gleichungen der Physik überall in derselben Weise ein-

1) Ann. d. Phys. 39, 18, 1912.

tritt wie die räumlichen Koordinaten, so muß das Verhältnis der Zeiten das gleiche sein, wie das, nach welchem sich die Längen ändern. Die Lichtgeschwindigkeit des Äthers bleibt demnach von dem Einfluß des Gravitationspotentials unberührt, sie ist aber auch die einzige Ätherkonstante, von der man dies sagen kann. Kurz gesagt behauptet also das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials, wenn das Potential ein Skalar ist, daß man das Gefüge des durch das Gravitationspotential veränderten Massenteilchens und alle physikalischen Ereignisse, die sich in ihm abspielen, aus dem Gefüge des unveränderten Teilchens und aus den Ereignissen in ihm, durch eine einfache Ähnlichkeitstransformation gewinnen kann.

Wie die Weltfunktion beschaffen sein muß, damit dieses Axiom gilt, läßt sich sehr leicht sagen: Sie muß eine homogene Funktion der Zustandsgrößen sein. Von welchem Grade sie sein muß, und welche Dimension man den einzelnen Arten der Zustandsgrößen geben muß, darüber sagt das Axiom nichts aus.

So außerordentlich allgemein dieses Axiom nun auch ist und so wenig man aus ihm über den Bau der Weltfunktion erfährt, so folgt doch aus ihm schon ein sehr wichtiger Satz, nämlich der Satz von der Proportionalität der trägen und der schweren Masse, oder, mit anderen Worten, das Newtonsche Gravitationsgesetz. Allerdings ist diese Proportionalität vielleicht nicht ganz streng mathematisch genau, aber sie ist sicher mit einer solchen Annäherung erfüllt, daß man auch bei den allersubtilsten Messungen, wie sie beispielsweise Eötvös gemacht hat, noch längst keine bemerkbare Abweichung zu erwarten hat. Bei gewissen sehr einfachen Annahmen über den Grad der Weltfunktion und über die Dimensionen, die den einzelnen Zustandsgrößen beizulegen sind, Annahmen, wie sie beispielsweise in der Nordströmschen Theorie gemacht sind, verschwinden auch noch diese kleinen, schon unbemerkbaren Abweichungen vollständig, so daß das Gravitationsgesetz mathematisch genau gilt.

Wie wesentlich in diesen Gravitationstheorien die Voraussetzung ist, daß sich das Gravitationspotential im Innern der Materie nicht superponiert, sondern eine durchgreifende Veränderung des ganzen Gefüges verursacht, wenn auch nach der sehr einfachen Gesetzmäßigkeit, die das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials fordert, erkennt man daraus, daß gerade diese innere Veränderung der Materie der Grund dafür ist, daß sich die schweren Massen anziehen. Es ist eine Frage gewesen, die wohl jedem, der über Gravitation nachgedacht hat, Kopfzerbrechen verursacht hat, wie es möglich ist, daß sich die gravitierenden Körper gerade so zu bewegen suchen, daß die Energie des Gravitationsfeldes sich vergrößern muß, während zum Beispiel die elektrischen Kräfte das a priori zu erwartende umgekehrte Verhalten zeigen. Der Grund hierfür ist eben, daß das Gravitationspotential das innere Gefüge der Materie in dem Maße beeinflußt, daß aus ihm die zur Bewegung notwendige Energie frei wird. Meines Wissens ist es das Verdienst Abrahams, dies zuerst klar erkannt zu haben. Wenn nun beispielsweise ein schwerer Körper mit Fallbeschleunigung zur Erde fällt, so findet in ihm lediglich eine innere Energieumwandlung statt, indem seine Atome durch die Veränderung des Gravitationspotentials so verändert werden, daß ihre innere Energie abnimmt, zugleich aber durch die Zunahme der Geschwindigkeit so, daß ihre Energie zunimmt. Es verwandelt sich also die potentielle Energie der Atome selbst in Bewegungsenergie, ihre Energie im ganzen bleibt konstant. Die Energieänderung des Gravitationsfeldes der Erde infolge der Annäherung des fallenden Körpers wird durch kleine Änderungen der Energie der Atome des festen Erdbodens ausgeglichen.

Wenn man sich diese Dinge recht vergegenwärtigt, so wird es verständlich, wie so aus dem Axiom der Relativität des Gravitationspotentials, also einer Aussage über die innern physikalischen Veränderungen der Materie durch das Potential, der Satz von der Proportionalität der beiden Massen, also eine Aussage über die Kraftwirkungen des Schwerefeldes folgen kann.

Versucht man nun weiter zu gehen und eine ähnliche einfache Gesetzmäßigkeit für den Einfluß einer äußeren Feldstärke der Gravitation auf das innere Gefüge der Materie zu gewinnen, so stößt man auf unüberwindliche Schwierigkeiten, wenn man die einfache Theorie der Gravitation mit skalarem Potential beibehalten will. Da tritt nun die Theorie mit dem Tensorpotential ein.

Vielleicht ist es nützlich, ehe ich weiter gehe, darauf aufmerksam zu machen, daß wir in der Physik gewohnt sind, der Beschreibung irgendeines Vorganges immer ein ganz bestimmtes Koordinatensystem zugrunde zu legen. Infolgedessen sind wir in der Lage, z. B. von bestimmten Geschwindigkeiten und von einer bestimmten Verteilung der Bewegungsenergie in dem betrachteten materiellen System zu sprechen, so wie ich es soeben bei der Betrachtung des fallenden Körpers getan habe. Freilich wird man, wenn man nach dem Prinzip der Relativität der Bewegungen ein anderes Koordinatensystem wählt, sich ein anderes Urteil über die Bewegungen und die Bewegungsenergien bilden, ohne daß sich irgendeine Schwierigkeit ein-

stellt, aber man kann das doch auch wieder nur so machen, daß man immer konsequent bei dem nunmehr gewählten Koordinatensystem bleibt. Ich werde also im folgenden voraussetzen, daß wir die ganze Welt an einem ganz bestimmten Koordinatensystem beurteilen, in welchem die euklidische und noch mehr: die minkowskische Geometrie gilt. Wie man dieses Koordinatensystem praktisch gewinnt, will ich jetzt nicht diskutieren. Das Auftreten von Gravitationspotentialen, die von — 1 verschieden sind, bringt einige Schwierigkeiten mit sich. Denn um die Deformationen, welche das Gravitationspotential an den Maßstäben und Zeitmessern hervorbringt, zu korrigieren, muß man das Gravitationspotential kennen. Andererseits kann man aber die Absolutwerte des Gravitationspotentials empirisch nur durch die Veränderungen, die es an der Materie hervorbringt, also an diesen Deformationen, bestimmen. Es könnte sich vielleicht ergeben, daß infolge dieser eigentümlichen Lage der Dinge die Bestimmung des Koordinatensystems noch mehr Willkürlichkeiten enthält, als das Relativitätsprinzip der Bewegungen schon mit sich bringt. Indessen wäre das für das Folgende ohne Bedeutung, wenn sich nur überhaupt ein Koordinatensystem festlegen läßt, in welchem die minkowskische Geometrie gilt und mit welchem sich eine vernünftige einfache Beschreibung der Welt ergibt. Das setzen wir voraus, und wie schon gesagt, wollen wir im folgenden alles ganz konsequent nach einem solchen in der ganzen Welt fest vorgelegten Koordinatensystem beurteilen.

Eine Theorie der Gravitation mit Tensorpotential unterscheidet sich, wenn in ihm das Axiom von der Relativität des Gravitationspotentials gilt, von einer Theorie mit skalarem Potential zunächst durch eine etwas größere Kompliziertheit. Das tensorielle Gravitationspotential wirkt auf die materiellen Teilchen so, daß sie nicht einfach eine nach allen Richtungen gleichförmige Ausdehnung oder Zusammenziehung erfahren, sondern daß sie gleichzeitig auch deformiert werden, daß also beispielsweise aus einer Kugel ein Ellipsoid wird. Die Komponenten des Tensorpotentials selber müssen irgendwie die Komponenten des Deformationstensors liefern. Da es sich nun aber um einen vierdimensionalen Tensor handelt, so erstreckt sich die Deformation auch auf die Zeit. Das heißt: die Periode der Atomschwingungen oder die Zeitdauer anderer Vorgänge im Atom wird verändert, und zwar in einem anderen Verhältnis, als die räumlichen Längen. Kurz gesagt, man kann das Gefüge des veränderten materiellen Teilchens und die Vorgänge in ihm aus dem Gefüge und den Vorgängen im unveränderten Teilchen nicht mehr durch eine Ähnlichkeitstransformation, wohl aber durch eine allgemeine homogene lineare Transformation gewinnen, wie man sie in der Lehre von den Deformationen fester Körper gebraucht. Die Änderung der Maßverhältnisse durch den Einfluß des Gravitationspotentials wird im Grunde dadurch hervorgerufen, daß das Gravitationspotential den ganzen physikalischen Zustand im Innern des materiellen Teilchens verändert und man gewinnt die sämtlichen Zustandsgrößen in einem Punkt des veränderten Teilchens aus denen in dem entsprechenden Punkt des unveränderten Teilchens durch gewisse lineare Transformationen, dieselben, welche von einem orthogonalen Koordinatensystem zu einem beliebigen schiefwinkligen Koordinatensystem mit veränderten Maßeinheiten führen. In derselben Weise werden auch die Konstanten des reinen Äthers, in welchem sich der Energieknoten befindet, durch das Gravitationspotential beeinflußt, nämlich Dielektrizität, Permeabilität und die entsprechenden Konstanten für die Gravitation. Das tensorielle Gravitationspotential bewirkt auch eine Veränderung der Lichtgeschwindigkeit, weil es Längen und Zeiten in verschiedenen Verhältnissen ändert, ja, die Lichtgeschwindigkeit nimmt sogar in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte an.

Die Bedingung für die Gültigkeit des Prinzips ist, daß die Weltfunktion die Zustandsgrößen nur in solchen Kombinationen enthält, daß nach der Ausführung einer linearen Transformation, wie ich sie soeben beschrieben habe, die neuen Werte der Zustandsgrößen in genau derselben Weise in die Funktion eintreten, wie vorher die untransformierten, abgesehen von einem konstanten Faktor, der in jedem Summanden in derselben Weise auftritt und sich vor die Funktion setzen läßt.

Ist das Prinzip erfüllt, so ergibt sich aus ihm auch für die Theorien mit Tensorpotential die Gültigkeit des Satzes von der Proportionalität der schweren und der trägen Masse. Man kann kurz sagen, daß die mathematische Durchführung dieser Theorien, obwohl sie ja etwas komplizierter sind, doch nicht wesentlich schwieriger ist als die der Theorien mit skalarem Potential, daß sie aber auch, solange man weiter nichts fordert als die Gültigkeit des Axioms von der Relativität des Gravitationspotentials, keine Vorteile vor diesen bieten.

Ein ungeheurer Fortschritt war es aber, als es Einstein und Hilbert gelang, der Weltfunktion eine solche Form zu geben, daß sie nicht nur für lineare, sondern für beliebige Transformationen invariant ist. Damit ist nun das unvergleichlich viel schwierigere Problem

gelöst, für den Einfluß eines beliebigen äußeren Gravitationsfeldes auf das innere Gefüge eines materiellen Teilchens eine einfache Regel zu finden. Wenn nämlich die Grundgleichungen der Physik beliebige Transformationen zulassen, so hat, wie wir im folgenden sehen werden, die Feldstärke der Gravitation an sich überhaupt gar keinen Einfluß auf das Teilchen; die Veränderungen des inneren Gefüges des Teilchens im Gravitationsfeld sind nur durch das Vorhandensein des äußeren Gravitationspotentials bedingt. Ist eine äußere Gravitationsfeldstärke vorhanden, so zeigt sich das im Innern des Teilchens nur daran, daß man das den Zustand beeinflussende Gravitationspotential auch in dem von dem Teilchen eingenommenen Volumen als veränderlich mit Ort und Zeit anzusehen hat. Die Veränderungen, die das Teilchen durch das Feld erfährt, sind demnach nicht mehr einfach durch eine lineare Transformation darzustellen, sondern erfordern kompliziertere und schwierigere Rechnungen.

Ganz besonders verwickelt wird das Problem, wenn sich die Deformationen, die das Gravitationspotential in den einzelnen Elementen des von dem Teilchen eingenommenen Raumzeitgebietes hervorbringt, im ganzen nicht zu einer endlichen inhomogenen Verzerrung zusammenschließen. Wie wir gleich sehen werden, ist das tatsächlich im allgemeinen so. Man kann dann die Punkte des veränderten Teilchens nicht entsprechenden Punkten des unveränderten Teilchens zuordnen und das veränderte Teilchen aus dem unveränderten durch irgendeine Transformation berechnen. Es ist dann vielmehr ein ganz neues Problem, das Gefüge des veränderten Teilchens zu finden. Es sind jedoch auch Gravitationsfelder denkbar, welche im ganzen eine endliche inhomogene Deformation ergeben. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist, daß die folgenden Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x_{\nu}} = \sum_{1}^{4}{}_{\sigma}\left(\Gamma^{\sigma}_{\nu\nu}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\right)$$

wo die $\Gamma^{\sigma}_{\nu\nu}$ Komponenten der Gravitationserregung sind. Da diese Größen lineare Funktionen der Feldstärken

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

sind, deren Koeffizienten von den Potentialen $g^{\mu\nu}$ abhängen, so sind die Riemannschen Differentialgleichungen Gleichungen zweiter Ordnung in den $g^{\mu\nu}$, und zwar ist jedes Glied entweder vom ersten Grad in den zweiten Ableitungen, oder vom zweiten Grad in den ersten Ableitungen. Glieder, die sowohl erste wie zweite Ableitungen enthalten, oder Glieder, die keine Ableitung enthalten, gibt es nicht. Die Koeffizienten sind Funktionen der $g^{\mu\nu}$.

Wenn das Gravitationsfeld die Riemannschen Differentialgleichungen befriedigt, so ist damit die hinreichende und notwendige Bedingung dafür erfüllt, daß es ein krummliniges Koordinatensystem

$$\lambda_1 = f_1(x, y, z, it),\ \lambda_2 = f_2(x, y, z, it),$$
$$\lambda_3 = f_3(x, y, z, it),\ \lambda_4 = f_4(x, y, z, it)$$

gibt, welches zu dem Gravitationspotential in folgenden Beziehungen steht:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial f_3}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial f_4}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial f_4}{\partial x_{\nu}} = g^{\mu\nu}.$$

Hier bedeuten x_1, x_2, x_3, x_4 die kartesischen Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = it$ und $g^{\mu\nu}$ die $(\mu\nu)$-Komponente des Potentials des vorgelegten Gravitationsfeldes in dem Punkte (x, y, z, it). Denken wir uns in einem Punkte, der entweder durch seine kartesischen Koordinaten (x, y, z, it) oder durch die Parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ des eben definierten krummlinigen Koordinatensystems bezeichnet werden kann, ein Wertesystem $(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$, welches den Differentialen (dx, dy, dz, idt) entspricht (Fig. 1b), also:

$$d\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot dz + \frac{\partial f_1}{i\,\partial t}\cdot i\,dt$$

usw., so ist dann:

$$d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + d\lambda_3^2 + d\lambda_4^2 = \sum_{1}^{4}{}_{\mu}\sum_{1}^{4}{}_{\nu} g^{\mu\nu}\cdot dx_{\mu}\cdot dx_{\nu}$$

$(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$ definiert ein schiefwinkliges vierdimensionales Parallelepipedon in dem krummlinigen Koordinatensystem der $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, welches dieselbe Diagonale hat, wie das rechtwinklige Parallelepipedon (dx, dy, dz, idt). Das Quadrat dieser gemeinsamen Diagonale ist natürlich:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2.$$

Es seien nun Gefüge des materiellen Teilchens und alle Vorgänge in ihm gegeben in einem idealen Vakuum. Wir wollen hier die Raumzeit-Koordinaten der Punkte des Teilchens mit (X, Y, Z, iT) bezeichnen. Das veränderte Gefüge desselben Teilchens und die entsprechenden Vorgänge in einem Raum-Zeitgebiet, in welchem das von Ort und Zeit abhängige Gravitationspotential $g^{\mu\nu}$ herrscht, läßt sich dann dadurch berechnen, daß man jedem Punkt (X, Y, Z, iT) den Punkt (x, y, z, it) zuordnet, dessen λ-Koordinaten sind:

$$\lambda_1 = X,\ \lambda_2 = Y,\ \lambda_3 = Z,\ \lambda_4 = iT,$$

und nun die Zustandsgrößen in (x, y, z, it) aus denen in (X, Y, Z, iT) nach den aus dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials bekannten Transformationsformeln berechnet. Einer Strecke (dX, dY, dZ, idT) in dem unveränderten Teilchen entspricht im veränderten Teilchen die Strecke (dx, dy, dz, idt), deren zugehörige $d\lambda$ sind:

$$d\lambda_1 = dX,\ d\lambda_2 = dY,\ d\lambda_3 = dZ,\ d\lambda_4 = idT.$$

Wenn wir die Länge dieser Strecke im veränderten Teilchen ds und die der entsprechenden Strecke im unveränderten Teilchen dS nennen, so ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - i \cdot dt^2$$
$$dS^2 = dY^2 + dY^2 + dZ^2 - i \cdot dT^2.$$

Man sieht, daß die Verbindungsstrecke (dx, dy, dz, idt) zweier benachbarter Punkte durch folgende Formel auf das ideale Vakuum umgerechnet werden kann:

$$dS^2 = \sum_1^4 \sum_1^4 g^{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu .$$

Das Gravitationspotential bewirkt also überall eine Verzerrung der Materie, wobei der Tensor des Deformationsellipsoides durch das Tensorpotential der Gravitation gegeben ist. Dabei verwandelt sich zum Beispiel (Fig. 1a und 1b) das rechtwinklige vierdimensionale Parallelepipedon (dX, dY, dZ, idT) in das schiefwinklige $(d\lambda_1\ d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$, alle die unendlich kleinen Deformationen schließen sich zu einer endlichen inhomogenen Deformation zusammen, und die nach dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials berechneten Zustandsgrößen erfüllen nun tatsächlich überall die Grundgleichungen der Physik, da diese nach dem Einsteinschen Axiom jede beliebige Transformation zulassen.

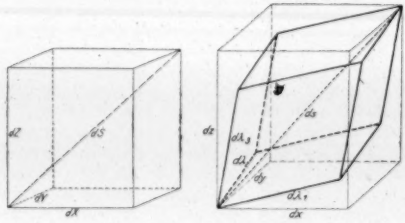


Fig. 1. *a* Volumenelement im idealen Vakuum, *b* Volumenelement im Gravitationsfeld.

Um jedes Mißverständnis auszuschalten, hebe ich noch hervor, daß man in dem betrachteten Gebiet bei Messungen mit starren Maßstäben und mit konstant gehenden Uhren, die im idealen Vakuum geeicht sind, in dem vom Gravitationsfeld $g^{\mu\nu}$ erfüllten Gebiet das in Wirklichkeit krummlinige und schiefwinklige Koordinatensystem der $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ für ein kartesisches orthogonales Koordinatensystem halten wird, solange man den Einfluß des Gravitationsfeldes auf Maßstäbe und Uhren unberücksichtigt läßt und ohne Kritik annimmt, daß sie in dem vom Gravitationsfeld erfüllten Raum genau ebenso zu gebrauchen sind, wie im idealen Vakuum. Hier liefern sie das zweifellos kartesische orthogonale Koordinatensystem (X, Y, Z, iT), welchem die $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ Punkt für Punkt entsprechen. Aber in dem vom Gravitationsfeld erfüllten Raum muß man die richtigen kartesischen Koordinaten (x, y, z, it) erst aus den durch den Einfluß des Gravitationspotentials gefälschten Messungen $(\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_4)$ durch geeignete Korrektionsrechnungen gewinnen.

Das ist der physikalische Inhalt des neuen Einsteinschen Axioms. Da die Transformationen, welche von dem (X, Y, Z, iT)-Gebiet zu dem (x, y, z, it)-Gebiet führen, nun im allgemeinen nicht mehr linear sind, so ist vorauszusehen, daß sie die beschleunigten und die krummlinigen Bewegungen frei fallender oder geworfener Körper in einem Gravitationsfeld richtig wiedergeben können. Es ist aber noch die Frage zu erledigen, ob oder vielmehr wann die Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, deren Gültigkeit die Voraussetzung für die Möglichkeit der Transformation war.

Ich will zuerst ein quasi-homogenes Gravitationsfeld betrachten. Darunter verstehe ich ein Feld, dessen Feldstärke in Raum und Zeit so wenig veränderlich ist, daß man in dem beschränkten Raum des Einsteinschen Coupés, in welchem man experimentiert, und in der kurzen Zeit der Dauer eines Versuchs noch keine Spur einer Veränderung des Feldes, einer Inhomogenität, beobachten kann. Ein solches quasihomogenes Feld kann ich praktisch durch ein anderes quasi-homogenes Feld ersetzen, welches die Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Der Koordinatenanfang für das (x, y, z, it)-System liege in dem Raumzeitgebiet, auf das die Beobachtungen beschränkt sind. Wenn man dann die Komponenten des Gravitationspotentials $g^{\mu\nu}$ des gegebenen Feldes in eine Potenzreihe nach den Koordinaten entwickelt:

$$g^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})_0 + \sum \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)_0 \cdot x_\sigma + \frac{1}{2!} \cdot \sum \left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right)_0 x_\sigma \cdot x_\tau + \cdots$$

so soll es also nach unserer Annahme für den Genauigkeitsgrad der Beobachtungen völlig ausreichend sein, wenn man die Reihe hinter den Gliedern vom ersten Grade in den x abbricht. Diese Glieder haben wir als klein von der ersten

Ordnung anzusehen, die Glieder mit höheren Potenzen von x als klein von höherer, zum mindesten von zweiter Ordnung, so daß man sie ohne weiteres streichen darf. Wir setzen nun die $(g^{\mu\nu})_0$ und die $(\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)_0$ in die Riemannschen Differentialgleichungen ein und suchen ein Wertesystem $\partial^2 g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma \partial x_\tau$ auf, welches die Gleichungen befriedigt. Ist nun jede Größe $(\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)_0 \cdot x$ sehr klein von erster Ordnung, wobei x den größten Wert bedeuten soll, den die x_σ in dem betrachteten Gebiet annehmen können, so folgt aus dem, was wir über die Natur der Riemannschen Differentialgleichungen oben bemerkt haben, daß die aus ihnen berechneten Größen $(\partial^2 \bar{g}^{\mu\nu}/\partial x_\sigma \partial x_\tau)_0 \cdot x^2$ sehr klein von zweiter Ordnung sind. Setzen wir also:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})_0 + \sum \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)_0 \cdot x_\sigma + \frac{1}{2!} \cdot \sum \left(\frac{\partial^2 \bar{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right)_0 \cdot x_\sigma x_\tau + \cdots$$

so stellen diese $\bar{g}^{\mu\nu}$ ein quasi-homogenes Feld dar, welches in den praktisch allein in Betracht kommenden Gliedern der Potenzreihenentwicklung mit dem vorgelegten Feld völlig übereinstimmt, durch welches wir demnach bei allen Rechnungen das vorgelegte Feld ersetzen können, und welches außerdem den Riemannschen Differentialgleichungen gehorcht. Das heißt:

Das Gefüge der materiellen Teilchen und die materiellen Vorgänge in einem quasi-homogenen Gravitationsfeld können wir aus dem Gefüge, das dieselben Teilchen in einem idealen Vakuum haben, und aus den entsprechenden Vorgängen im idealen Vakuum durch eine geeignete Transformation mit ausreichender Genauigkeit berechnen.

Anders wird es aber in einem nicht-homogenen Gravitationsfeld. Einstein hebt selber in seiner letzten Annalenarbeit[1]) hervor, daß von dem inhomogenen Gravitationsfeld eines wirklichen materiellen Körpers die Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt sein können. Es ist demnach nicht möglich, für ein endliches, nicht gar zu kleines, Gebiet in Raum und Zeit die Deformationen der Strecken und der Zeitintervalle durch das Gravitationspotential mit Hilfe einer Koordinatentransformation darzustellen.

Um dies zu beweisen, gehe ich davon aus, daß, wenn es eine solche Transformation gäbe, die Lichtstrahlen diejenigen Kurven darstellen müßten, in welche die Koordinatentransformation die geraden Linien des idealen Vakuums überführen würde; denn im idealen Vakuum ist die gerade Linie physikalisch identisch mit dem Lichtstrahl. Nun denke ich mir (Fig. 2) aber Lichtstrahlen a und b, die beide von einem

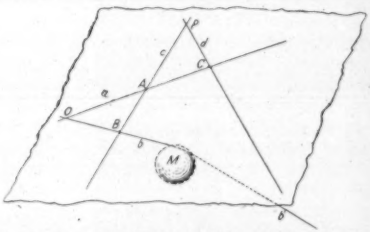


Fig. 2. Ein wirkliches Gravitationsfeld läßt sich nicht wegtransformieren.

Punkte O ausgehen. Die durch a und b definierte Ebene heiße E. Dicht neben dieser Ebene, ohne von ihr geschnitten zu werden, befinde sich eine schwere Masse M, und zwar so, daß der Lichtstrahl b dicht über ihr vorbeigeht. Der Strahl b wird dann durch das Gravitationsfeld von M aus der Ebene herausgebrochen in die Richtung b'. Dagegen soll a überall so weit von M entfernt bleiben, daß er keine bemerkbare Brechung erfährt; a bleibt also in der Ebene E. Nun mögen von einem anderen Punkt P dieser Ebene zwei Strahlen c und d ausgehen, die überall von M so weit entfernt bleiben, daß sie nicht gebrochen werden, und zwar verlaufe c in dem Gebiet der Ebene, in welchem der Strahl b das Gravitationsfeld von M noch nicht passiert hat, dagegen d in dem anderen Gebiet, in welchem der Lichtstrahl b nicht mehr in der Ebene E vorhanden ist. c schneidet also a und b in den Punkten A, B, dagegen schneidet d nur a in einem Punkte C, kreuzt aber bei b' im Raume vorbei. Es ist unmöglich, diese Figur durch eine Transformation aus einem ebenen Vierseit zu gewinnen, denn jedem der vier Schnittpunkte der Strahlen dieses ebenen Vierseits müßte auch nach der Transformation ein Schnittpunkt der Kurven entsprechen, in welche die vier Geraden des Vierseits transformiert wären. Es müßte dann also d auch b' schneiden, was tatsächlich nicht der Fall ist. (Schluß folgt.)

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 803, 1916.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Dem Privatdozent für anorganische Chemie an der Universität Wien Dr. Moritz Kohn, dem Privatdozent für Physik an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Hans Witte und dem Privatdozent für Physik an der Universität Berlin Dr. Otto Reichenheim der Titel Professor.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.